

# Dominos

## 1. Génération de dominos

Un domino est la donnée de deux entiers compris entre 0 et  $M$  (la valeur de l'entier  $M$  sera spécifiée pour chaque question). L'orientation d'un domino au moment de son tirage n'a pas d'importance :  $(1, 2)$  et  $(2, 1)$  sont deux façons de représenter le même domino, et l'une ou l'autre pourra être utilisée.

On considère la suite d'entiers  $(u_k)$  définie par :

$$u_0 = 13 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = 15091 \times u_k \bmod 64007$$

La suite  $(u_k)$  va servir à sélectionner les dominos possibles. Les valeurs des points sur les deux facettes des dominos sont données par  $u_{2i} \bmod (M+1)$  et  $u_{2i+1} \bmod (M+1)$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$

**Question 1.** Quels sont les deux premiers dominos pour

- a)  $M = 6$ ?                      b)  $M = 13$ ?

Un jeu de dominos ne contient généralement pas de doublons. Il faut donc interdire d'avoir deux fois le même domino. C'est l'hypothèse qui sera faite pour la suite de ce sujet et il reste donc à éliminer les doublons du tirage.

**Question 2.** Pour  $M = 15$ , combien faut-il tirer de dominos pour qu'il en reste  $N$  une fois que les doublons ont été retirés, et quel est le dernier domino tiré pour

- a)  $N = 20$ ?                      b)  $N = 50$ ?

Dans les questions suivantes on notera  $D_{M,N}$  la séquence des  $N$  dominos différents portant des points entre 0 et  $M$  générée par cette méthode. On s'assurera de précalculer les séquences  $D_{M,N}$  de manière à pouvoir y accéder en temps constant.

## 2. Train de dominos

On considère une version simplifiée du jeu de dominos où l'objectif est simplement de faire la plus longue suite possible avec les dominos piochés. Un *train* de longueur  $\ell$  est ainsi une suite  $(g_k, d_k)_{1 \leq k \leq \ell}$  de dominos orientés de telle sorte que  $d_k = g_{k+1}$ , c'est-à-dire que deux dominos voisins dans le train ont le même nombre de points sur les deux faces en contact. Ainsi, étant donnés les six dominos  $(0, 5), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$  il est possible de construire le train de longueur 4 suivant :  $(2, 3)(3, 5)(5, 2)(2, 1)$ .

**Question 3.** Combien peut-on construire de trains  $(p, q)(q, r)$  de longueur 2 (avec  $p < r$ ) en prenant des dominos dans

- a)  $D_{6,10}$ ?                      b)  $D_{24,20}$ ?

### Respect de l'ordre de tirage

Dans un premier temps, nous allons imposer une condition supplémentaire à la construction d'un train de dominos, en ne considérant que les trains dont les dominos apparaissent *dans l'ordre de leur tirage*. Autrement dit, un train  $(g_k, d_k)_{1 \leq k \leq \ell}$  n'est dans cette section valable que si pour tout  $i < j$ , le domino  $(g_i, d_i)$  a été pioché avant le domino  $(g_j, d_j)$ .

**Question 4.** Soit  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et  $v \in \llbracket 0, M \rrbracket$ . On note  $L_{n,v}$  la longueur du plus long train dont les dominos ont été pris dans l'ordre parmi les  $n$  premiers dominos piochés et dont l'extrémité droite porte  $v$  points.

Exprimer  $L_{n,v}$  en fonction des  $L_{n-1,v'}$  pour  $v' \in \llbracket 0, M \rrbracket$ .

**Question 5.** En utilisant la technique associée à la programmation dynamique, déterminer la longueur du plus long train respectant l'ordre du tirage qu'il est possible de réaliser avec les dominos pris dans

- a)  $D_{6,10}$                       b)  $D_{24,30}$                       c)  $D_{100,2000}$

## Plus long train de dominos

On se place maintenant dans la situation la plus générale, à la recherche du plus long train qu'il soit possible de former avec un ensemble de  $N$  dominos.

**Question 6.** Quelle est la longueur du plus long train qu'il est possible de construire avec les dominos

- a)  $D_{6,10}$ ?      b)  $D_{12,10}$ ?      c)  $D_{24,20}$ ?      d)  $D_{24,30}$ ?

On pourra commencer par calculer, à l'aide d'une fonction récursive, la longueur du plus grand train dont l'extrémité droite se termine par  $v \in \llbracket 0, M \rrbracket$ .

## Les réponses attendues

**Question 1.**

a)

b)

**Question 2.**

a)

b)

**Question 3.**

a)

b)

**Question 5.**

a)

b)

c)

**Question 6.**

a)

b)

c)

d)