TP

Coupes d'un tableau

Méthodologie

Les réponses attendues figurent au verso de cette page ; elles vous permettent de vérifier la justesse de votre code. Si vous n'obtenez pas la bonne réponse, testez vos fonctions sur un tableau de petite taille que vous aurez vous-même créé pour comprendre ce qui ne va pas. Notez que pour certaines questions, vos algorithmes peuvent être corrects mais trop lents pour pouvoir s'appliquer au tableau t. Dans ce cas, il faudra réfléchir à une solution plus efficiente. Enfin, **n'oubliez pas de faire des sauvegardes régulières de votre travail** sous peine de devoir tout reprendre en cas de plantage du système.

Génération d'un tableau

Le sujet propose divers parcours d'un tableau t de taille $n = 10\,000$ dont les éléments valent 0 ou 1. Le tableau est initialisé comme suit. On définit la suite récurrente d'entiers $(u_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ par :

- $u_0 = 13$;
- pour tout i compris entre 1 et $n-1$, $u_i = (16\,365 \times u_{i-1}) \bmod 65\,521$.

Puis on crée un tableau t de n cases en posant, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $t[i] = u_i \bmod 2$.

Question 1. Quelles sont les valeurs de u_{1000} ? de u_{5000} ?

Question 2. Combien d'éléments du tableau t sont égaux à 1 ? Quel est l'indice du 1 000$^{\text{e}}$ d'entre eux ?

Coupes

Une *coupe* $t[i:j]$ du tableau t est une suite d'éléments consécutifs $t[i], t[i+1], \cdots, t[j-1]$ où $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Noter que $t[i:j]$ est de longueur $j-i$ (en conséquence de quoi si $i = j$ la coupe est vide).

Une coupe $t[i:j]$ est un *palindrome* si elle est égale à la coupe obtenue en prenant ces éléments à l'envers, c'est-à-dire si $t[i] = t[j-1]$, $t[i+1] = t[j-2]$, $t[i+2] = t[j-3]$, etc.

Question 3. Déterminer le nombre de palindromes de longueur 7 présents dans le tableau t, et préciser le deuxième plus petit indice i tel que $t[i:i+7]$ soit un palindrome de longueur 7.

Question 4. Déterminer la longueur $\ell_{\max}$ du plus long palindrome présent dans t ainsi que le plus petit indice i tel que $t[i:i+\ell_{\max}]$ soit un palindrome.
On pourra utiliser le fait que s'il existe un palindrome de longueur $\ell > 2$, alors il en existe aussi un de longueur $\ell - 2$.

On dit qu'une coupe $t[i:j]$ est un *plateau* lorsque tous ses éléments sont nuls.

Question 5. Déterminer la longueur $\ell_{\max}$ du plus long plateau présent dans t ainsi que le plus grand indice i tel que $t[i:i+\ell_{\max}]$ soit un plateau.

On interprète à présent une coupe comme l'écriture en base 2 d'un entier naturel. Par exemple, l'interprétation de la coupe $[0,1,0,1,1]$ est l'entier $8+2+1 = 11$.

Question 6. Calculer l'interprétation de la coupe $t[1000:1020]$.

Question 7. Déterminer le plus petit entier naturel qui ne soit pas l'interprétation d'une coupe de t.

Question 8. Donner la plus grande des interprétations des coupes de longueur 20 qui soit un nombre premier.

On dit qu'une coupe $t[i:j]$ est *équilibrée* lorsqu'elle comporte autant de 0 que de 1.

Question 9. **(difficile)** Déterminer la longueur maximale d'une coupe équilibrée.

Les réponses attendues

Question 1.

$u_{1000} =$	57 067	$u_{5000} =$	43 145

Question 2.

Nombre de 1 :	5 046	Indice du 1 000e :	2 002

Question 3.

Nombre de palindromes :	1255	Indice de début du 2e :	23

Question 4.

ℓ_{max} d'un palindrome :	29	Indice de début du 1er :	4004

Question 5.

ℓ_{max} d'un plateau :	14	Indice de début du dernier :	450

Question 6.

interprétation de $t[1000:1020]$: 678 358

Question 7.

plus petit entier absent : 1 232

Question 8.

coupe première maximale pour $\ell = 20$: 1 048 423

Question 9.

ℓ_{max} d'une coupe équilibrée : 6640