

Les exercices qui suivent sont des extraits d'oraux du concours Centrale dont je n'ai gardé que les questions de nature informatique.

Exercice 1

- a) Rédiger en Python une fonction qui calcule $u_n = \int_0^1 (3x^2 - 2x^3)^n dx$.
- b) On admet que $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{3^k (-2)^{n-k}}{3n-k+1}$. En déduire une deuxième implémentation du calcul de u_n .
- c) Calculer u_n pour $n \in \llbracket 0, 50 \rrbracket$ par ces deux méthodes. Commentaire ?
- d) Tracer les valeurs de $\sqrt{n}u_n$ pour $n = 100k$ et $k \in \llbracket 0, 100 \rrbracket$. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 2 On note u_n l'unique solution de l'équation $e^x = x^n$ dans l'intervalle $[1, 2]$.

- a) Afficher u_n pour $n = 10k$, $k \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$. Que peut-on conjecturer ?
- b) On note ℓ la limite de (u_n) . À l'aide de Python conjecturer des valeurs a et b telles que

$$u_n - \ell = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 3 On considère l'équation différentielle $tx'' - x' + 4t^3x = 0$ et on pose $a = \sqrt{\pi/2}$.

On admet que l'unique solution vérifiant les conditions initiales $y(a) = y'(a) = 1$ est $f : t \mapsto \sin(t^2) - \frac{\cos(t^2)}{2a}$.

Tracer sur l'intervalle $[a, 4]$ la solution exacte, la solution approchée donnée par la méthode d'Euler que l'on programmera, et celle fournie par la fonction `scipy.integrate.odeint`.

Exercice 4 Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on définit le polynôme

$$Q_p = (2p+2)X^{2p+1} - 2pX^{2p-1} - (2p-1)X^{2p-2} - \dots - 2X - 1$$

- a) En utilisant le module `numpy.polynomial` écrire une fonction Python renvoyant Q_p .
- b) Calculer les racines de Q_p pour $p \in \{3, 4, 5, 10\}$; quelle conjecture peut-on faire sur les racines réelles ?
- c) Tracer sur un graphique le cercle unité et placez les racines de Q_p pour $p < 30$; quelle conjecture peut-on faire sur les racines complexes ?
- d) Écrire une fonction Python renvoyant le minimum des modules des racines de Q_p .