Travaux pratiques

Algèbre

Les exercices qui suivent sont des extraits d'oraux du concours Centrale dont je n'ai gardé que les questions de nature informatique.

Exercice 1 On note χ_n le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1/n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Écrire une fonction prenant pour paramètre n et renvoyant les coefficients du polynôme χ_n (utiliser la fonction `poly` du module `numpy`).

b) Afficher les coefficients de χ_n pour $n \in [\![2,8]\!]$ puis conjecturer la valeur de χ_n.

c) Afficher les modules des racines de χ_n pour $n \in [\![2,8]\!]$. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 2 Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ on introduit la matrice suivante : $M(a,b) = \begin{pmatrix} 3a-2b & -6a+6b+3 \\ a-b & -2a+3b+1 \end{pmatrix}$.

a) On note $e(a,b)$ le réel $|\lambda_1 - \lambda_2|$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres complexes de $M(a,b)$. Écrire en Python une fonction `ecart` qui, étant donnés deux entiers a et b renvoie une valeur approchée décimale à 10^{-2} près de $e(a,b)$.

b) Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Écrire en Python une fonction `hasard` qui, étant donné p, réalise la simulation de 500 valeurs (a,b) du couple de variables aléatoires (A,B) et renvoie le nombre de fois où `ecart(a, b)` est supérieur ou égal à 10^{-1}.

c) Pour $p = \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots, \frac{99}{100}$, relier les points de coordonnées $\left(p, \frac{\texttt{hasard}(p)}{500}\right)$.

d) Sur le même graphe, tracer la courbe de la fonction $p \longmapsto \frac{2-2p+p^2}{2-p}$ pour p dans $]0,1[$. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 3 Soit $n \geqslant 1$ un entier et a un réel non nul. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & 1/a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Écrire en Python une fonction qui, étant donnés un entier $n \geqslant 1$ et un réel a non nul renvoie la matrice $A_{n,a}$.

b) Donner des valeurs approchées décimales des valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $3 \leqslant n \leqslant 8$ et a dans $\{-2,-1,1,2,3\}$. Que peut-on conjecturer ? La matrice $A_{n,a}$ est-elle diagonalisable ?

c) Soit $(P_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X \qquad P_2 = X^2 - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

Calculer les polynômes $P_3, \ldots, P_8$, puis donner des valeurs approchées des racines de ces polynômes.
Conjecturer un lien entre P_n et $A_{n,a}$.

Exercice 4 Sur $E = \mathbb{R}[X]$ on définit le produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ et la norme $\|P\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} |P(t)|$.

a) On note $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille orthonormale obtenue par le procédé de Schmidt à partir de la base canonique. Calculer $E_0, E_1, \ldots, E_5$.

b) Tracer le graphe des E_i $(0 \leqslant i \leqslant 5)$, et déterminer les valeurs de $t \in [-1,1]$ où $\|P\|_\infty$ est atteinte.