PC*

50 exercices de calcul

Les versions digitales de ce document et de son corrigé sont disponibles à l'adresse `https://pc-etoile.schola.fr/`

Polynômes

Exercice 1

Déterminer les racines complexes du polynôme $P = X^2 - 2(\cos\theta)X + 1$.

Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer les racines complexes du polynôme $P = X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(z)X + |z|^2$.

Exercice 3

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P = X^4 - 2\cos(2\alpha)X^2 + 1$ et $Q = X^4 + 2\cos(2\alpha)X^2 + 1$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $a_nX + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 1$ (autrement dit, il existe un polynôme Q_n tel que $X^n = (X^2+1)Q_n(X) + a_nX + b_n$). Calculer a_n et b_n.

Trigonométrie et nombres complexes

Exercice 5

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $z = \dfrac{1}{1+e^{i\theta}}$.

Exercice 6

Linéariser les quantités suivantes :

$$\sin^2 x \qquad \cos^2 x \qquad \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y \qquad \sin x \cos y$$

Exercice 7

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0 \bmod \pi$. Simplifier l'expression $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ à l'aide de l'angle moitié.

Exercice 8

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi \bmod 2\pi$. Exprimer la quantité $\dfrac{1}{1+\cos x}$ en fonction de $\tan\dfrac{x}{2}$.

Exercice 9

Simplifier l'expression suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \cos(kx)$.

Exercice 10

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\theta \not\equiv 0 \bmod (2\pi)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$ comme une fraction ne contenant que des sinus.

Dérivées et primitives

Exercice 11

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^x$.

Exercice 12

Calculer (en simplifiant le plus possible) la dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x)$.

Exercice 13

Calculer la dérivée d'ordre $n \geqslant 1$ de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 14

Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $f : x \mapsto (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^x$.

Exercice 15

Soit $f : x \mapsto \cos(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Exercice 16

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

Exercice 17

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 18

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$.

Exercice 19

Déterminer une primitive sur $]-1,1[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

Exercice 20

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \arctan x$.

Exercice 21

Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$ calculer $\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,\mathrm{d}t$.

Développements asymptotiques

Exercice 22

Donner un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto (1+x^2)^{1/x} - 1$.

Exercice 23

Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $f : x \mapsto \exp\left(\frac{(\ln x)^2}{1+\ln x}\right)$.

Exercice 24

Donner un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto (\cos x)^{1/x} - 1$.

Exercice 25

Donner un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto 1 - \cos(1-\cos x)$.

Exercice 26

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \tan x$.

Exercice 27

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 28

Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$.

Exercice 29

Déterminer un développement asymptotique à deux termes en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.

Exercice 30

Déterminer un développement asymptotique à deux termes en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(x+1)$.

Exercice 31

Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ à la précision $o(1/x^4)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Exercice 32

Déterminer la limite en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\sin x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$.

Suites

Exercice 33

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $u_n = \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$.

Exercice 34

Déterminer la limite de la suite $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice 35

Déterminer la limite de la suite $u_n = \left(3 \times 2^{1/n} - 2 \times 3^{1/n}\right)^n$.

Exercice 36

Donner un équivalent de la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 37

Déterminer la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 38

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. La suite (u_n) est-elle monotone ?

Exercice 39

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. Prouver que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Algèbre linéaire

Exercice 40

Soit E un espace vectoriel, et $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n \circ v - v \circ u^n$.

Exercice 41

Calculer l'inverse de la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{A}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$.

Exercice 42

Calculer A^n lorsque $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}$.

Exercice 43

Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par ses coefficients $\mathrm{A}_{ij} = i + j - 1$. Déterminer le rang de A.

Exercice 44

Soit $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant $\mathrm{A}_{ij} = \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. À quelle condition portant sur x la matrice A est-elle inversible ?

Probabilités

Exercice 45

On lance six dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir tous les nombres de 1 à 6 ?

Exercice 46

Lors d'un examen un étudiant a le choix entre m réponses. Il connait la réponse à la question avec une probabilité p. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard et de façon équiprobable l'une des m réponses.
Sachant qu'il a bien répondu, quelle est la probabilité qu'il ait connu la bonne réponse ?

Exercice 47

Soit $p \in]0,1[$. Une expérience aléatoire réussit avec la probabilité p ; on la répète une infinité de fois de façon indépendante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n la probabilité que l'expérience ait réussi au moins une fois lors des n premières expériences.

a. On note N_p le plus petit des entiers n pour lesquels $p_n \geqslant 1/2$. Exprimer N_p puis la limite lorsque p tend vers 0 de $p\mathrm{N}_p$.

b. On note maintenant X_n le nombre d'expériences ayant réussi à l'instant n. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n)$ et exprimer le rang N'_p à partir duquel $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n) \geqslant 1/2$. Quelle est la limite de $p\mathrm{N}'_p$ lorsque p tend vers 0 ?

Exercice 48

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note E_n l'événement « il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathrm{X}_i = 1$ ». Déterminer la probabilité p_n de E_n, puis la limite de la suite (p_n).

Exercice 49

Soient X et Y deux variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et $\mathrm{S} = \max(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Déterminer la loi de S (on pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(\mathrm{S} \leqslant k)$).

Exercice 50

On considère $2n$ individus répartis en n couples. Parmi ces $2n$ individus, m meurent. déterminer l'espérance du nombre de couples survivants.
Indication. Numéroter les couples de 1 à n et utiliser la variable aléatoire X_k égale à 1 si le couple k survit, et à 0 sinon.