réponses

50 exercices de calcul

Polynômes

Exercice 1

$e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Exercice 2

z et $\overline{z}$.

Exercice 3

D'après le premier exercice, $P = (X^2 - e^{2i\alpha})(X^2 - e^{-2i\alpha}) = (X - e^{i\alpha})(X + e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})(X + e^{-i\alpha})$ donc

$$P = (X^2 - 2X\cos\alpha + 1)(X^2 + 2X\cos\alpha + 1)$$

$Q = X^4 - 2\cos\big(2(\alpha + \pi/2)\big)X^2 + 1$ donc $Q = (X^2 - 2X\cos(\alpha + \pi/2) + 1)(X^2 + 2X\cos(\alpha + \pi/2) + 1)$ soit

$$Q = (X^2 + 2X\sin\alpha + 1)(X^2 - 2X\sin\alpha + 1)$$

Exercice 4

En substituant i puis $-i$ à X on obtient $i^n = a_n i + b_n$ et $(-i)^n = -ia_n + b_n$ donc

$$\begin{cases} a_n = -\dfrac{1}{2}\left(i^{n+1} + (-i)^{n+1}\right) \\ b_n = \dfrac{1}{2}\left(i^n + (-i)^n\right) \end{cases}$$

Ainsi, si $n = 2p$ est pair, $a_{2p} = 0$ et $b_{2p} = (-1)^p$; si $n = 2p+1$ est impair, $a_{2p+1} = (-1)^p$ et $b_{2p+1} = 0$.

Trigonométrie et nombres complexes

Exercice 5

$z = \dfrac{e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}} = \dfrac{2}{\cos(\theta/2)} e^{-i\theta/2}$ donc $|z| = \dfrac{2}{\cos(\theta/2)}$ et $\arg(z) \equiv -\dfrac{\theta}{2} \mod (2\pi)$.

Exercice 6

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$; $\sin x \sin y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$; $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$; $\sin x \cos y = \dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$.

Exercice 7

$\dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan(x/2)$.

Exercice 8

$\dfrac{1}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \tan^2(x/2)\right)$.

Exercice 9

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cos(kx) = \mathfrak{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{ikx}\Big) = \mathfrak{Re}\Big(\big(1-e^{ix}\big)^n\Big) = \mathfrak{Re}\Big(e^{inx/2}\big(-2i\sin(x/2)\big)^n\Big)$$
$$= \begin{cases} (-1)^p\cos(nx/2)\big(2\sin(x/2)\big)^n & \text{si } n=2p \text{ est pair} \\ (-1)^p\sin(nx/2)\big(2\sin(x/2)\big)^n & \text{si } n=2p+1 \text{ est impair}\end{cases}$$

Exercice 10

Plusieurs expressions équivalentes sont possibles :

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta) = \mathfrak{Im}\Big(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}\Big) = \mathfrak{Im}\Big(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\Big) = \mathfrak{Im}\Big(\frac{(1-e^{-i\theta})(1-e^{i(n+1)\theta})}{2(1-\cos\theta)}\Big) = \frac{\sin\theta+\sin(n\theta)-\sin(n+1)\theta}{4\sin^2(\theta/2)}.$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta) = \mathfrak{Im}\Big(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}\Big) = \mathfrak{Im}\Big(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\Big) = \mathfrak{Im}\Big(\frac{e^{-i\theta/2}-e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}\Big) = \mathfrak{Im}\Big(\frac{e^{-i\theta/2}-e^{i(n+1/2)\theta}}{-2i\sin(\theta/2)}\Big) = \frac{\cos(\theta/2)-\cos(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$$
$$= \frac{\sin\big((n+1)\theta/2\big)\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Dérivées et primitives

Exercice 11

$f(x) = e^{x\ln x}$ donc $f'(x) = (\ln x+1)e^{x\ln x} = (\ln x+1)x^x$.

Exercice 12

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Exercice 13

Pour tout $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

Exercice 14

D'après la formule de Leibniz,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2+x+1)^{(k)}e^x = (x^2+x+1)e^x + n(2x+1)e^x + n(n-1)e^x = \big(x^2+(2n+1)x+(n^2+1)\big)e^x$$

Exercice 15

$f(x) = \mathfrak{Re}(e^{ix})$ donc $f^{(n)}(x) = \mathfrak{Re}\big(i^n e^{ix}\big) = \mathfrak{Re}\big(e^{ix+in\pi/2}\big) = \cos\Big(x+\dfrac{n\pi}{2}\Big)$ (on peut aussi procéder par récurrence).

Exercice 16

Posons $g(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$. Alors $f(x) = g(x^2) - g(x)$ donc $f'(x) = 2xg'(x^2) - g'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

Exercice 17

À une constante près on obtient $F(x) = x(\ln x - 1)$.

Exercice 18

À une constante près on obtient $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)$.

Exercice 19

À une constante près on obtient $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 20

À une constante près on obtient $\mathrm{F}(x)=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Exercice 21

$$\int_0^{2\pi}\cos(pt)\cos(qt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\cos(p+q)t+\cos(p-q)t\Big)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & \text{si } p\neq q\\ 2\pi & \text{si } p=q\end{cases}$$

Développements asymptotiques

Exercice 22

$f(x)\underset{0}{\sim}x$.

Exercice 23

$f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

Exercice 24

$f(x)\underset{0}{\sim}-\dfrac{x}{2}$.

Exercice 25

$f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^4}{8}$.

Exercice 26

$f(x)\underset{0}{=}x+\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^4)$.

Exercice 27

$f(x)\underset{0}{=}1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{8}x^4+\mathrm{o}(x^4)$.

Exercice 28

$f(x)\underset{0}{=}\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+\mathrm{o}(x^3)$.

Exercice 29

$f(x)\underset{+\infty}{=}\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{6}+\mathrm{o}(x^2)$.

Exercice 30

$f(x)\underset{+\infty}{=}\ln x+x+\mathrm{o}(x)$.

Exercice 31

$f(x)\underset{+\infty}{=}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Exercice 32

$\lim_{0} f(x) = -\frac{1}{3}$.

Suites

Exercice 33

$\lim u_n = e^{\alpha}$.

Exercice 34

$\lim u_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Exercice 35

$\lim u_n = \frac{8}{9}$.

Exercice 36

$u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 37

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ donc $\lim u_n = 1$.

Exercice 38

$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(2n+1)}$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 39

$u_n = \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k-1) - 2\ln k + \ln(k+1)\Big) = \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k-1) - \ln k\Big) + \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln k\Big) = \ln 1 - \ln n + \ln(n+1) - \ln 2 = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 2$
donc $\lim u_n = -\ln 2$.

Algèbre linéaire

Exercice 40

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$ (preuve par récurrence).

Exercice 41

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 42

$A^n = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(nx) & \mathrm{sh}(nx) \\ \mathrm{sh}(nx) & \mathrm{ch}(nx) \end{pmatrix}$ (preuve par récurrence).

Exercice 43

$\mathrm{rg}\, A = 2$ (calcul par opérations élémentaires : réaliser les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$).

Exercice 44

On calcule $\det A = (x-1)^n + n(x-1)^{n-1} = (x-1)^{n-1}(x-1+n)$ (utiliser par exemple la n-linéarité du déterminant) donc A est inversible si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq n-1$.

Probabilités

Exercice 45

$p = \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5!}{6^5}$.

Exercice 46

La probabilité qu'il connaisse la bonne réponse est égale à $\frac{mp}{(m-1)p+1}$ (application de la formule de Bayes).

Exercice 47

a. On a $p_n = 1-(1-p)^n$ et $p_n \geqslant \frac{1}{2} \iff n \geqslant \frac{-\ln 2}{\ln(1-p)}$ donc $N_p = \left\lceil \frac{-\ln 2}{\ln(1-p)} \right\rceil$.

On a $\frac{-p\ln 2}{\ln(1-p)} \leqslant pN_p < p - \frac{p\ln 2}{\ln(1-p)}$ donc $\lim p \to 0 pN_p = \ln 2$.

b. X_n suit une loi binomiale de paramètres (n,p) donc $\mathbb{E}(X_n) = np$. Ainsi, $N'_p = \left\lceil \frac{1}{2p} \right\rceil$ et $\frac{1}{2} \leqslant pN'_p < \frac{1}{2} + p$ donc $\lim\limits_{p \to 0} pN'_p = \frac{1}{2}$.

Exercice 48

$p_n = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ et $\lim p_n = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 49

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $\mathbb{P}(S \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k \text{ et } Y \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)\mathbb{P}(Y \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ donc $\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(S \leqslant k) - \mathbb{P}(S \leqslant k-1) = \frac{2k-1}{n^2}$.

Exercice 50

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2n-m}{2}}{\binom{2n}{2}} = n\frac{\binom{2n-m}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{(2n-m)(2n-m+1)}{2(2n-1)}.$$