Séries entières

Exercice 1 Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque :

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \qquad a_n = n^{(-1)^n} \qquad a_n = \frac{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-2)}{n!} \qquad a_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n}} \qquad a_n = \binom{kn}{n} \text{ (avec } k \in \mathbb{N}^*\text{)}$$

Exercice 2 On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergences respectifs R_p et R_i.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, et $\alpha > 0$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$.

Exercice 4 Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad f(x) = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad f(x) = \ln\left(\sqrt{1-2x\operatorname{ch} a + x^2}\right) \qquad f(x) = \arctan(x+1)$$

Exercice 5 Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ et en déduire le développement de $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1-x}$.

Exercice 6 Développer en série entière $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ en exploitant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 7 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(na)}{n} x^n \quad (a>0) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_1^a (\ln t)^n\,\mathrm{d}t \quad (a>0)$$

Exercice 8 On considère la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. On suppose l'existence de $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ tel que f soit développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(2n)!} x^{2n}$.

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k} a_k$.

Exercice 9 Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle *dérangement* de E une permutation sans point fixe, et on note d_n le nombre de ces dérangements, avec la convention $d_0 = 1$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$.

b) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence est au moins égal à 1, calculer $\mathrm{e}^x f(x)$ et en déduire $f(x)$.

c) Prouver alors que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.