Travaux dirigés

Réduction des endomorphismes

Exercice 1 Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $M = CC^T$.
Quel est le rang de M ? En déduire le polynôme caractéristique de M. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 Soit A la matrice d'un projecteur, et $\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(AM + MA\right) \end{array}\right)$.

a) Justifier l'existence de $r \in [\![0, n]\!]$ et de $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

b) L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ? Donner les éléments propres de ϕ.

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la matrice $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Montrer que $\chi_{A_{n+1}}(X) = (X - n)\chi_{A_n}(X) - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

b) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(-1)^{n+k}\chi_{A_n}(k) > 0$.

c) En déduire que chaque intervalle $]0,1[$, $]1,2[$, ..., $]n-1,+\infty[$ contient exactement une valeur propre de A_n.

Exercice 4 Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \left(\begin{array}{c|c} C & I_n \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si M est diagonalisable il en est de même de C.

b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes non nuls, et a et b deux nombres complexes (avec $a \neq 0$) tels que $f \circ g - g \circ f = af + bg$. Le but de l'exercice est de montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.
Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\phi_g : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ en posant $\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u$.

Dans les deux premières questions on suppose $b = 0$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_g(f^n) = naf^n$, et en déduire l'existence d'un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g, et en déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.

Dans la dernière question on suppose $b \neq 0$.

c) Calculer $\phi_g(h)$ avec $h = af + bg$, et en déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

a) Donner un exemple d'un tel endomorphisme en dimension 2, par exemple en trouvant une matrice 2×2 vérifiant $A^2 = -I$.

b) Montrer que u n'a pas de valeurs propres réelles, et en déduire que la dimension de E est paire.

c) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel stable par u.

d) Montrer que si $\dim E \geqslant 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_n, u(e_n))$ soit une famille libre de E (procéder par récurrence).

e) En déduire l'existence d'une base (b) pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(b)}(u) = \left(\begin{array}{c|c} O & -I_p \\ \hline I_p & O \end{array}\right)$.

Exercice 7 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ et $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) = 2$. Montrer l'existence d'une base (e) dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.