Variables aléatoires

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique. Trouver la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ soit nilpotente.

Exercice 2 Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, et N une variable aléatoire indépendante des X_i et suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Exercice 3 Le nombre d'œufs pondus par une poule suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf éclot de manière indépendante avec une probabilité $p \in]0,1[$. Déterminer la loi du nombre N d'œufs qui éclosent.

Exercice 4 Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ on note T_m la variable aléatoire du m^e succès, autrement dit $T_m = \min\Big\{k \in \mathbb{N}^* \;\Big|\; X_1 + \cdots + X_k = m\Big\}$. Déterminer la loi et l'espérance de T_m.

Exercice 5

a) Soit X une variable aléatoire discrète strictement positive. Montrer que $\mathbb{E}(X + 1/X) \geqslant 2$.

b) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes strictement positives indépendantes et de même loi. Montrer que $\mathbb{E}(X/Y) \geqslant 1$.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. À quelle condition sur f les variables X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $Y_n = \min(X_1,\dots,X_n)$, $Z_n = \max(X_1,\dots,X_n)$, $\alpha_n = \mathbb{E}(Y_n)$ et $\beta_n = \mathbb{E}(Z_n)$.

a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.

b) Exprimer α_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent de β_n.

Exercice 8 On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) *converge en probabilité* vers une variable aléatoire X lorsque pour tout $\epsilon > 0$, $\lim \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0$.

a) On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, un réel m et une suite de variables aléatoires (X_n) possédant toutes un moment d'ordre 2 et telle que :

– La suite $(\mathbb{E}(X_n))$ converge vers m ;

– La suite $(\mathbb{V}(X_n))$ converge vers 0.

Montrer que (X_n) converge en probabilité vers $X = m$;

b) Soit S_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On pose $Y_n = \exp(S_n/n)$. Montrer que (Y_n) converge en probabilité vers $Y = \exp(p)$.

Exercice 9 On considère deux variables aléatoires entières N et X, ainsi qu'une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

a) Montrer que les séries génératrices de X, N et Y vérifient la relation : $G_Y = G_N \circ G_X$.

b) En déduire que si N et X admettent une espérance, il en est de même de Y, et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ (formule de Wald).