révision

Polynômes

Définition d'un polynôme

Exercice 1

Soit P un polynôme. Montrer que $P(X)-X$ divise $P\big(P(X)\big)-X$.

Division euclidienne

Exercice 2

Soit $B \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré $n>0$. À tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on fait correspondre le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de P par B (ainsi $P = BQ + R$) et on définit les applications

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & R \end{array} \right) \qquad \text{et} \qquad \psi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & Q \end{array} \right)$$

a. Montrer que ϕ et ψ sont des applications linéaires, puis chercher leurs noyaux et leurs images.

b. Montrer que pour tout $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, $\phi(P_1P_2) = \phi\big(\phi(P_1)\phi(P_2)\big)$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = 1 + X^n + X^{2n} + X^{3n} + X^{4n}$.

a. Déterminer les racines complexes de P_1.

b. Pour quelles valeurs de n le polynôme P_1 divise-t-il P_n ?

Racines et factorisation

Exercice 5

a. Factoriser en éléments irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme X^n+1.

b. En déduire la factorisation en éléments irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $X^{2k}+1$ et $X^{2k-1}+1$.

Exercice 6

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tel que P' divise P.

Exercice 7

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel.

a. Montrer que si $a \in \mathbb{R}$ est racine d'ordre $m \geqslant 1$ de P alors a est racine de P' d'ordre $m-1$.

b. Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors P' l'est aussi (*utiliser le théorème de Rolle*).

c. Montrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ alors P' l'est aussi.

Exercice 8

Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et $P = X^5 + pX + q$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q pour que deux des racines de P aient pour somme 1.

Familles de polynômes

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$.

a. Montrer l'existence d'une unique famille de polynômes (P_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

b. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.

Exercice 10

On définit une suite de polynômes (T_n) en posant :

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = X \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

a. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n a la même parité que n.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, et justifier que T_n est l'unique polynôme vérifiant cette relation.

d. Déterminer les racines de T_n dans $[-1, 1]$, et en déduire que T_n est un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

e. Montrer que $(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$ *(on pourra dériver deux fois la relation obtenue à la question c)*

Exercice 11

On définit une suite de polynômes (P_n) à l'aide des relations :

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

a. Calculer les polynômes P_n pour $2 \leqslant n \leqslant 5$.

b. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré et le coefficient dominant de P_n.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme P_n a même parité que $n-1$.

d. Déterminer $P_n(0)$ (*on distinguera deux cas suivant la parité de n*).

e. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(n\theta) = \sin(\theta)P_n(2\cos\theta)$.

f. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ le polynôme P_n est scindé à racines simples (*on déterminera ses racines*).

g. En déduire pour $n \geqslant 1$ la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

On appelle *suite de Fibonacci* la suite (f_n) définie par les relations :

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

h. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(i) = i^{n-1} f_n$ et en déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que $f_n^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.