Travaux dirigés

Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 Soit $h:[0,1]\to\mathbb{C}$ est une fonction continue. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{xh(t)\,\mathrm{d}t}{x^2+t^2}=\frac{\pi}{2}h(0)$.

Exercice 2 Montrer que la fonction $g: x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\arctan t\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ puis en donner un équivalent en 0 et en $+\infty$.

Exercice 3 Montrer que la fonction $g: x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. En déduire une expression de g sans symbole intégral (on admettra que $g(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 4 On considère la fonction $g: x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'elle est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par g sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5 Montrer que la fonction $g: x\mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$ vérifie l'équation différentielle : $xy''+y'+xy=0$. Développer $g(x)$ en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Exercice 6 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=f'(0)$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$, et en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 On pose pour $x\geqslant 0$: $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer explicitement $f'(x)$ pour en déduire $f(x)$.

Exercice 8 On considère la fonction $g: x\mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(x^2+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$. Quel est son ensemble de définition ? g y-est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$? Exprimer g sans symbole intégral.