Travaux dirigés

Le théorème de convergence dominée

Suites et intégrales

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t = f(1)$.

Exercice 2 Trouver, lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de : $u_n = \int_0^1 \sin(\pi t^n)\,\mathrm{d}t$ (le résultat s'exprime à l'aide d'une intégrale).

Exercice 3 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée, telle que $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f et f' soient bornées. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale : $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ existe, et calculer $\ell = \lim\limits_{+\infty} \mathrm{I}_n$.
On suppose $f'(0) \neq 0$. Donner un équivalent de $(\mathrm{I}_n - \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 Calculez la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on considérera la fonction $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Séries et intégrales

Exercice 7 Calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

Exercice 8 Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$ (utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$).

Exercice 9 Montrer que $\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 10 On pose pour $n \geqslant 1$: $u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. Justifier la convergence et calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Justifier l'existence puis calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Indication. Écrire $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, puis d'établir successivement que $u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ puis que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$.