Travaux dirigés

Intégration sur un intervalle

Exercice 1 Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ln(t+\mathrm{e}^{-\beta t})\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\big(f(t)-f(t+1)\big)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

b) On suppose de plus f' intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

c) Soit $\alpha > 1/2$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.

On pose $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \lambda x$.

a) Montrer que la fonction F est T-périodique.

b) Soit $\alpha > 0$. Démontrer la convergence puis l'égalité des intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{f(t)-\lambda}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} = \alpha\displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{\mathrm{F}(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable. Montrer que pour tout $h > 0$ la série $\sum hf(nh)$ converge, puis calculer la limite $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} hf(nh)$.

Exercice 6 Trouver un équivalent simple de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-n/k}}{k^2}$.