PC*

Lycée Marcelin Berthelot

Exercices

Algèbre linéaire

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (⋆)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathrm{H} = \left\{ f \in \mathrm{E} \,\middle|\, f(0) = f'(0) = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E, et en trouver un supplémentaire.

Exercice 2 (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \cdots + \mathrm{F}_n = \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $\mathrm{G}_k \subset \mathrm{F}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tel que $\mathrm{G}_1 \oplus \mathrm{G}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{G}_n = \mathrm{E}$ (procéder par récurrence en commençant par traiter le cas $n = 2$).

Exercice 3 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel, et H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de E : $\mathrm{E} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$.
Pour tout $k \in \{1, 2\}$ on pose $\mathcal{H}_k = \left\{ u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \,\middle|\, \operatorname{Im} u \subset \mathrm{H}_k \right\}$. Montrer que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Projections vectorielles

Exercice 4 (⋆)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.
Montrer que $v \circ u$ est une projection vectorielle, puis que $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

Exercice 5 (⋆)

Soit E un espace vectoriel, et p et q deux projections vectorielles qui commutent. Montrer que $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 6 (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projections vectorielles sur un même sous-espace H. Montrer que quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $u = \lambda p + (1 - \lambda) q$ est une projection vectorielle sur H.

Exercice 7 (⋆⋆)

Quelles sont les droites vectorielles stables par un projecteur ? En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie impaire et p et q deux projections vectorielles alors il existe une droite vectorielle stable à la fois par p et par q.

Familles génératrices, familles libres, bases

Exercice 8 (⋆)

On considère une famille libre $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ d'un espace vectoriel E, et on définit la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ en posant : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $v_k = u_k + u_{k+1}$ et $v_n = u_n + u_1$. Étudier la liberté de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$.

Exercice 9 (⋆)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille libre de E. Montrer que la famille $(f_1', \ldots, f_n')$ est au moins de rang $n - 1$.

Exercice 10 (⁎⁎)

Soit E un espace vectoriel, $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires. On pose $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ et $x_i'=x_i+y$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Étudier à quelle condition la famille $(x_1',\dots,x_n')$ est libre.

Exercice 11 (⁎)

Soit E un espace vectoriel, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que pour tout $x\in\mathrm{E}$, la famille $\big(x,u(x)\big)$ est liée. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice 12 (⁎⁎)

Soit E un espace vectoriel et $(v_1,\dots,v_n)\in\mathrm{E}^n$.
On note V le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\left\{v_i-v_j \;\middle|\; (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\right\}$. Montrer que $\dim\mathrm{V}\leqslant n-1$.

Applications linéaires

Exercice 13 (⁎⁎)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On pose :

$$\mathcal{A}=\left\{v\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}) \;\middle|\; u\circ v\circ u=0\right\}.$$

a. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

b. Justifier l'existence d'une base (e) de E et d'une base (f) de F telles que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{I}_r & \mathrm{O}\\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O}\end{array}\right)$.

c. On note M la matrice définie ci-dessus. Pour $v\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$, on pose $\mathrm{N}=\mathrm{Mat}_{f,e}(v)$. À quelle condition, portant sur N, a-t-on $v\in\mathcal{A}$? En déduire la dimension de $\mathcal{A}$.

Exercice 14 (⁎)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose l'existence de $x_0\in\mathrm{E}$ tel que la famille $(e)=\big(x_0,u(x_0),\cdots,u^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.
Soit $v\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u\circ v=v\circ u$. Montrer l'existence de scalaires $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tels que

$$v=a_0\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}+a_1u+a_2u^2+\cdots a_{n-1}u^{n-1}.$$

Indication. On pourra considérer la décomposition du vecteur $v(x_0)$ dans la base (e).

Exercice 15 (⁎⁎⁎)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a. Montrer que pour tout projecteur p de E, $\mathrm{tr}(p)=\mathrm{rg}(p)$.

On considère désormais un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^m=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, et on pose $p=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}u^k$.

b. Montrer que p est un projecteur de E (on pourra commencer par calculer $p\circ u$).

c. En déduire que $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{tr}(u^k)=\dim\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$.

Trace d'un endomorphisme

Exercice 16 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} u = 1$. Montrer que $u^2 = (\operatorname{tr} u)u$, puis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = (\operatorname{tr} u)^{k-1} u$.

Exercice 17 (∗)

Soit u une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$). Montrer l'existence d'une matrice A telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $u(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

Exercice 18 (∗∗)

Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(M) = M^T$.

Exercice 19 (∗∗∗)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle vérifiant $\operatorname{tr} M = 0$.

a. Montrer qu'il existe $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1.

b. En déduire que M est semblable à une matrice de la forme

$$N = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \text{où } M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ vérifie } \operatorname{tr} M_1 = 0.$$

c. Montrer alors que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

Image et noyau d'une application linéaire

Exercice 20 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\} \iff \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$ et $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u \iff \operatorname{Im} u = \operatorname{Im}(u^2)$.

Exercice 21 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $\dim H_1 + \dim H_2 = \dim E$ si et seulement s'il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $H_1 = \operatorname{Ker} u$ et $H_2 = \operatorname{Im} u$.

Exercice 22 (∗∗)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r telle que $A^2 = 0$.

Montrer que $r \leqslant n/2$ puis que A est semblable à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Exercice 23 (∗)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, H un sous-espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim u(H) \geqslant \dim H - \dim(\operatorname{Ker} u)$.

Exercice 24 ($\ast$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v).$$

Indication. Considérer la restriction w de u à $\operatorname{Ker}(u+v)$.

Exercice 25 ($\ast\ast$)

Soient E, F, G et H quatre espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $h \in \mathcal{L}(G, H)$. Montrer que :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) + \operatorname{rg}(h \circ g) \leqslant \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(h \circ g \circ f)$$

Exercice 26 ($\ast\ast\ast$)

Soit $A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\operatorname{rg}(M) \geqslant r$.

b. Montrer que $\operatorname{rg} M = r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

Sous-espaces stables

Exercice 27 ($\ast$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $B = \begin{pmatrix} \boxed{O_n} & \boxed{A} \\ \boxed{I_n} & \boxed{O_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que B est inversible si et seulement si A l'est, et calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 28 ($\ast$)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 29 ($\ast$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ (u - \beta \mathrm{Id}_E) = 0$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $\alpha \neq \beta$. On pose $H_1 = \operatorname{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$ et $H_2 = \operatorname{Ker}(u - \beta \mathrm{Id}_E)$.

Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par u, puis que $E = H_1 \oplus H_2$.
Que dire de la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition ? Montrer que $u = \alpha p + \beta(\mathrm{Id}_E - p)$, où p est la projection vectorielle sur H_1 parallèlement à H_2.

Exercice 30 ($\ast\ast$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c'est à dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$).

Établir que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$.
Établir que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, puis justifier que la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition est triangulaire à coefficients diagonaux nuls.

Exercice 31 ($\star\star$)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = \mathrm{Id}$, $g^2 = \mathrm{Id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a. Montrer que E est de dimension paire. On pose $\dim(\mathrm{E}) = 2p$.

b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_p \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 32 ($\star\star\star$)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_k) = e_{k+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

Exercice 33 ($\star\star$)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $\big(x, u(x)\big)$ est liée.

b. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui laissent stable tout hyperplan de E.

Déterminants

Exercice 34 ($\star$)

Calculer le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 35 ($\star$)

Calculer le déterminant d'ordre $n+1$: $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

Exercice 36 ($\star$)

Soient $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ et $(b) = (b_1, \ldots, b_n)$ deux n-uplets de $\mathbb{K}^n$.

On note $\mathrm{M} = (m_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $m_{ij} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ a_i & \text{sinon} \end{cases}$. En utilisant la linéarité du déterminant vis-à-vis de chacune de ses colonnes, calculer $\det \mathrm{M}$.

Réduction des endomorphismes

Éléments propres

Exercice 1 (∗)

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $u(P) = (X-a)P' + P$.

Exercice 2 (∗)

Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme définie par $\phi(M) = M^T$. Déterminer les éléments propres (valeurs et sous-espaces propres) de ϕ.

Exercice 3 (∗)

On appaelle *matrice stochastique* une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

- pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \in [0,1]$;
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

a. Montrer que 1 est valeur propre de A.

b. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 4 (∗)

Soit A la matrice d'un projecteur, et $\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(AM + MA\right) \end{array}\right)$.

a. Justifier l'existence de $r \in [\![0,n]\!]$ et de $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

b. Déterminer les éléments propres de ϕ. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Exercice 5 (∗∗)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $a_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$

a. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

b. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 (∗∗)

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & O & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{où } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{1,n\} \text{ ou } j \in \{1,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Polynôme caractéristique

Exercice 7 (∗)

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $M = CC^T$.

Quel est le rang de M ? En déduire le polynôme caractéristique de M. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 2. Exprimer le polynôme caractéristique de u en fonction de $\operatorname{tr} u$ et de $\operatorname{tr}(u^2)$.

Exercice 9 (∗∗)

Soit $n \geqslant 2$ un entier, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne non nul. Soit la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & C^T \\ \hline C & O_{n-1} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Déterminer le rang de A et en déduire que X^{n-2} divise le polynôme caractéristique de A.

b. Montrer que $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - \alpha X - \beta)$ où β est une constante que l'on exprimera à partir de C.

c. Montrer que si $\beta = 0$ la matrice A n'est pas diagonalisable.

d. On suppose $\beta \neq 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 10 (∗∗)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la matrice $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

a. Montrer que $\chi_{A_{n+1}}(X) = (X - n)\chi_{A_n}(X) - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

b. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(-1)^{n+k}\chi_{A_n}(k) > 0$.

c. En déduire que chaque intervalle $]0,1[$, $]1,2[$, $\ldots$, $]n-1,+\infty[$ contient exactement une valeur propre de A_n.

Diagonalisation

Exercice 11 (∗)

Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ pour lesquelles la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 12 (∗)

Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$f(M) = (\operatorname{tr} A)M - (\operatorname{tr} M)A.$$

Déterminer les éléments propres de f. f est-il diagonalisable ? Et lorsque $\operatorname{tr} A = 0$?

Exercice 13 (∗)

On considère la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} O & -I_n \\ \hline I_n & O \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{K})$.

Calculer A^2. La matrice A est-elle diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? et lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Exercice 14 (∗)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.
Quelles sont les valeurs propres de A ? Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ lorsque $m = 2$.

Exercice 15 (∗)

a. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice associée à u prend la forme suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} u \neq 0$.

b. Soient $u_1, \dots, u_n$ des réels non nuls, et $\mathrm{A} = \left(\dfrac{u_i}{u_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 16 (∗)

On considère deux réels *distincts* α et β tels que $u^2 - (\alpha+\beta)u + \alpha\beta\mathrm{Id} = 0$. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(u - \alpha\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \beta\mathrm{Id})$, et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 17 (∗∗∗)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{O} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A. Si A est diagonalisable, en est-il de même de B ?

Exercice 18 (∗∗)

Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que si M est diagonalisable il en est de même de C.

b. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 19 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme diagonalisable.
Montrer qu'il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $\left(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{n-1}(a)\right)$ soit une base de E si et seulement si u possède n valeurs propres distinctes.

Projecteurs spectraux

Exercice 20 (∗)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P.

b. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$. Justifier que la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est diagonale.

c. En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

Exercice 21 (∗)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, de valeurs propres -1 et 2. Exprimer A^n en fonction de A et I_p.
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de valeurs propres 0, 1 et 2. Exprimer A^n en fonction de I, A et A^2.

Commutant d'un endomorphisme

Exercice 22 (⁎⁎)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$.

Exercice 23 (⁎)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes non nuls, et a et b deux nombres complexes (avec $a \neq 0$) tels que $f \circ g - g \circ f = af + bg$. Le but de l'exercice est de montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.
Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\phi_g : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ en posant $\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u$.

Dans les deux premières questions on suppose $b = 0$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_g(f^n) = naf^n$, et en déduire l'existence d'un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g, et en déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.

Dans la dernière question on suppose $b \neq 0$.

c. Calculer $\phi_g(h)$ avec $h = af + bg$, et en déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 24 (⁎⁎)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = M$. Montrer que $(\operatorname{tr} A)^3 = n$.

Exercice 25 (⁎⁎)

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ espaces vectoriel E de dimension finie vérifiant $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v possèdent un vecteur propre en commun, et en déduire l'existence d'une base (e) sur laquelle $\operatorname{Mat}_{(e)}(u)$ et $\operatorname{Mat}_{(e)}(v)$ sont toutes deux triangulaires supérieures (on pourra raisonner par récurrence sur $\dim E$ pour prouver le second point).

Trigonalisation

Exercice 26 (⁎)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où λ et μ sont des valeurs à déterminer.
En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 27 (⁎⁎)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 28 (⁎⁎⁎)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que la matrice P(A) soit nilpotente.

Exercice 29 (⁎⁎⁎)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda\}$ et $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) = 2$. Montrer l'existence d'une base (e) dans laquelle $\operatorname{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 30 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

a. Donner un exemple d'un tel endomorphisme en dimension 2, par exemple en trouvant une matrice 2×2 vérifiant $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}$.

b. Montrer que u n'a pas de valeurs propres réelles, et en déduire que la dimension de E est paire.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel stable par u.

d. Montrer que si $\dim \mathrm{E} \geqslant 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_n, u(e_n))$ soit une famille libre de E (procéder par récurrence).

e. En déduire l'existence d'une base (b) pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(b)}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & -\mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \end{array}\right)$.

Suites récurrentes linéaires

Exercice 31 (∗)

On considère la suite u définie par les données initiales $u_0 = 1 + \cos\theta$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4 + \cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$, et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} + 2(1 - \cos\theta)u_{n+2} + (1 - 4\cos\theta)u_{n+1} + 2u_n = 0$.
Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 32 (∗)

On considère deux urnes A et B, chacune contenant initialement deux jetons : l'un portant la valeur 0 et l'autre la valeur 1. On effectue successivement des échanges qui consistent à échanger un jeton pris au hasard dans l'urne A avec un jeton pris au hasard dans l'urne B. On note Z_n la variable aléatoire égale à la somme des valeurs des jetons contenus dans l'urne A après avoir effectué n échanges. On contiendra que Z_0 est égale à 1. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0)$, $b_n = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 1)$ et $c_n = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 2)$.

a. Établir une relation matricielle liant les vecteurs $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$.

b. Déterminer la limite des suites (a_n), (b_n) et (c_n), puis la limite de la suite $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n)$.

Suites et séries numériques

Suites numériques

Exercice 1 (∗)

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose la suite (u_n) croissante et la suite (u_{2n}) convergente. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2 (∗∗)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim u_n^2 = 1$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| < 1$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 (∗)

On considère deux réels a et b vérifiant : $0 < a < b$, ainsi que les deux suites (u_n) et (v_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 4 (∗)

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et de la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

a. Étudier l'éventuelle convergence de la suite (u_n).

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. Montrer que $\lim(v_{n+1} - v_n) = 1$.

c. En déduire à l'aide du théorème de Cesàro un équivalent de u_n.

Exercice 5 (∗)

Donner la limite puis un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (∗∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - k)$.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ il existe un unique réel $x_n \in \,]0,1[$ tel que $\mathrm{P}_n'(x_n) = 0$.

Indication : étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)}$.

b. Déterminer la limite puis un équivalent de la suite (x_n).

Exercice 7 (∗∗∗)

Soit (x_n) une suite réelle, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$.

a. Montrer que si (y_n) converge vers 0, il en est de même de la suite (x_n).

b. En déduire que si (y_n) converge il en est de même de la suite (x_n).

Exercice 8 (∗∗)

Soit (z_n) une suite complexe vérifiant la relation $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Séries à terme général positif

Exercice 9 (∗)

Étudier la convergence des séries de terme général (α désigne un paramètre réel quelconque) :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \qquad 1 - \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \qquad \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \qquad \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan(n-2)\right)$$

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \qquad u_n = (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha \qquad u_n = \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) \qquad \mathrm{e}^{-(\ln n)^\alpha}$$

Exercice 10 (∗)

Pour quelles valeurs de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la série de terme général $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer dans ce cas la somme de cette série.

Exercice 11 (∗)

Étudier à l'aide du critère de d'Alembert la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{n!}$.

Exercice 12 (∗)

Discuter en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \dfrac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$.

Exercice 13 (∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Donner un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$, et en déduire l'existence d'une constante γ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

Exercice 14 (∗)

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif, et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 15 (∗)

Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 16 (∗∗)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs ; on suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Utiliser une comparaison logarithmique avec une série de Riemann pour prouver la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 17 ($\ast$)

Une *série de Bertrand* est de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Lorsque $\alpha > 1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée converge.

b. Lorsque $\alpha < 1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée diverge.

c. Lorsque $\alpha = 1$, montrer en utilisant la technique de comparaison à une intégrale que la série de Bertrand converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 18 ($\ast\ast\ast$)

Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Comparaison à une intégrale

Exercice 19 ($\ast$)

En exploitant une comparaison série/intégrale, déterminer la limite : $\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 20 ($\ast$)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Exercice 21 ($\ast$)

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale calculer $\lim_{x \to 1^+} (x-1)\zeta(x)$.

Séries alternées

Exercice 22 ($\ast$)

Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature bien que u_n soit équivalent à v_n.

Exercice 23 ($\ast$)

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ avec } \alpha > 0 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos(n)} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n - (\ln n)^\alpha}$$

Exercice 24 ($\ast\ast$)

Déterminer la nature des séries $\sum \frac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n}$ et $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 25 ($\ast\ast$)

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : regrouper les termes deux par deux.

Transformation d'Abel

Exercice 26 (∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum \frac{\mathrm{H}_n}{n(n+1)}$ converge, et en calculer la somme.

Exercice 27 (∗∗)

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante, telle que $\sum u_n$ converge.

a. Montrer que $\lim nu_n = 0$.

b. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

c. *Application*. Calculer pour $0 \leqslant r < 1$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n$.

Exercice 28 (∗∗∗)

Soit une suite (u_n) telle que la série $\sum nu_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Indication. Poser $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} ku_k$ *et exprimer* u_n *à l'aide des termes de la suite* (S_n).

Produit de Cauchy

Exercice 29 (∗∗)

Soit $a \in [0,1[$. Écrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries, et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} na^n$. Calculer par la même méthode $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2a^n$.

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1 (∗)

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = nx^n \ln x$ pour $x \in]0,1]$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.
On considère un réel $\alpha \in]0,1[$. La convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0,\alpha]$? sur $[\alpha,1]$?

Exercice 2 (∗)

Soit $\alpha \geqslant 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$.
À quelle condition portant sur α la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 3 (∗)

Étudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0,+\infty[$ de la suite de fonctions (f_n), avec :

a. $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+n}$; *b.* $f_n : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x/n}$; *c.* $f_n : x \mapsto n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}$; *d.* $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$.

Le cas échéant, on précisera des intervalles $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ sur lesquels la convergence est uniforme.

Exercice 4 (∗)

Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,+\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

Pour les 5/2 : calculer ensuite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (∗)

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f_n(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{nx}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$. Calculer $f_n(n)$; la convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$? et sur $[0,a]$ (avec $a > 0$) ?

Exercice 6 (∗∗)

Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $h(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} h(x) = 0$. On définit les suites de fonctions (f_n) et (g_n) en posant : $f_n(x) = h(nx)$ et $g_n(x) = h(x/n)$.

a. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ des suites de fonctions (f_n) et (g_n).

b. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

c. Sur quels intervalles y-a-t'il convergence uniforme ?

Exercice 7 (∗∗)

Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = g(x)\mathrm{e}^{-nx}$.

a. Étudier la convergence simple de (f_n), puis montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

b. Fixons $\epsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ de sorte que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $|f_n(x)| \leqslant \epsilon$, et en déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8 (∗∗∗)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f'' soit bornée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on définit la fonction $u_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en posant : $\forall x\in\mathbb{R},\ u_n(x)=\frac{n}{2}\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right)$.

a. Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une fonction à préciser.

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Séries de fonctions

Exercice 9 (∗)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geqslant 0$ on pose $u_n(x)=\dfrac{x}{(1+nx)^2}$ et $v_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum u_n$ puis de $\sum v_n$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 10 (∗)

Soit $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$. Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
Utiliser un encadrement donné par la technique de comparaison à une intégrale pour déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 11 (∗∗)

Pour tout $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}$.

a. Justifier que f est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b. Démontrer que pour tout $x>0$, $2f(x)=1+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx}{(1+nx)\big(1+(n+1)x\big)}$.

c. Utiliser le critère spécial des séries alternées pour en déduire un encadrement de $f(x)$, puis sa limite en 0.

Exercice 12 (∗)

Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction :

$$f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$

Exprimer la dérivée sans symbole de sommation, et en déduire une expression simple de $f(x)$.

Exercice 13 (∗)

On considère la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 14 (∗∗)

Montrer que la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, puis donner des équivalents simples de f en $+\infty$ et en 0.

Exercice 15 (∗∗)

Soit (a_n) une suite décroissante à valeurs positives, et $f_n : x \mapsto a_n x^n (1-x)$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b. Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est normale sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

c. Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.

Exercice 16 (∗∗)

Soit a un réel fixé dans $]-1,1[$. On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}$.

a. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire une expression simple de $f'(x)$ puis de $f(x)$. On admettra que $f(0) = -\ln(1-a)$.

c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(x) + 1)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 17 (∗∗)

On pose sous réserve de convergence : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f et de continuité de f.

b. Déterminer la limite en 0 de $xf(x)$.

Exercice 18 (∗∗)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

b. Montrer que la quantité $xf(x) - f(x+1)$ est constante sur $]0,+\infty[$.

c. Donner des équivalents en 0 et $+\infty$ de $f(x)$.

d. Tracer la courbe représentative de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 19 (∗∗)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

a. Établir l'existence et la continuité de f sur $]0,+\infty[$.

b. Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

c. Tracer la courbe représentative de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 20 (∗∗)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\big)$.

a. Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b. Chercher une relation simple liant $f(x)$ et $f(x+1)$.

c. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Séries entières

Rayon de convergence

Exercice 1 (∗)

Soit $a > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n \qquad \sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^{2n} \qquad \sum a^n z^{n!} \qquad \sum \frac{n^n}{n!} z^n$$

$$\sum n^{(-1)^n} z^n \qquad \sum \frac{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-2)}{n!} z^{2n} \qquad \sum \mathrm{e}^{\sqrt{n}} z^n \qquad \sum \binom{kn}{n} z^n \text{ (avec } k\in\mathbb{N}^*)$$

Exercice 2 (∗)

Pour $n \geqslant 1$ on note a_n le nombre de diviseurs de n. déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 3 (∗)

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergences respectifs R_p et R_i.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 4 (∗)

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, et $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$?

Exercice 5 (∗)

Soit (a_n) une suite ne s'annulant pas. Comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{1}{a_n} z^n$.

Exercice 6 (∗)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie : $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_a \mathrm{R}_b$. A-t-on toujours égalité ?

Exercice 7 (∗∗)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Exercice 8 (∗∗)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, et $\alpha > 0$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$.

Calcul de sommes

Exercice 9 (⋆)

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

Exercice 10 (⋆)

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(na)}{n} x^n \quad (a>0) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_1^a (\ln t)^n \,\mathrm{d}t \quad (a>0)$$

Exercice 11 (⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum s_n x^n$, puis en calculer la somme.

Exercice 12 (⋆⋆)

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

Exercice 13 (⋆⋆)

Calculer la somme sur l'intervalle ouvert de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$.

Exercice 14 (⋆⋆)

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

a. Quel est son rayon de convergence ? On note $\mathrm{Li}_2(x)$ sa somme (cette fonction s'appelle le dilogarithme). Reconnaître sa dérivée.

b. Pour $x \in]0,1[$, exprimer $\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

c. En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

Développement en série entière

Exercice 15 (⋆)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, les fonctions :

$$\begin{aligned}
&f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \sin x && \text{(utiliser la formule d'Euler)}\\
&f_2 : x \mapsto \ln(1+x-2x^2) && \text{(factoriser le polynôme)}\\
&f_2 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{1-2x\,\mathrm{ch}\,a + x^2}\right) && \text{(factoriser le polynôme)}\\
&f_4 : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1}) && \text{(dériver la fonction)}\\
&f_5 : x \mapsto (\arctan x)^2 && \text{(utiliser un produit de Cauchy)}\\
&f_6 : x \mapsto \sin(\alpha \arcsin x) && \text{(déterminer une équation différentielle vérifiée par } f_6\text{)}
\end{aligned}$$

Exercice 16 $(\ast\ast)$

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, la fonction $x \mapsto \arctan(x+1)$.

Exercice 17 $(\ast)$

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière au voisinage de 0, puis calculer les coefficients de ce développement.

Exercice 18 $(\ast)$

Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ et en déduire le développement de $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1-x}$.

Exercice 19 $(\ast)$

Développer en série entière $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ en exploitant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 20 $(\ast\ast)$

Soit $r > 0$ et f et g deux fonctions développables en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$. On suppose que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x)g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 21 $(\ast)$

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$, dont on cherche l'unique solution vérifiant les conditions de Cauchy : $y(0) = y'(0) = 0$.
Si cette solution est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme : $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
Calculer explicitement a_n en fonction de n. Quel est le rayon de convergence de la série entière correspondante, et quel en est la somme ?

Exercice 22 $(\ast\ast)$

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. On suppose pour l'instant que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ est strictement positif et on note $f(x)$ sa somme sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$.

b. En déduire que pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

c. En déduire la valeur de R, puis développer en série entière l'expression précédente pour en déduire l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 23 $(\ast\ast)$

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle *dérangement* de E une permutation sans point fixe, et on note d_n le nombre de ces dérangements, avec la convention $d_0 = 1$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$.

b. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence est au moins égal à 1, calculer $\mathrm{e}^x f(x)$ et en déduire $f(x)$.

c. Prouver alors que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Étude au bord de l'intervalle de convergence

Exercice 24 (⋆⋆)

Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs telle que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ soit égal à 1 et la série $\sum a_n$ divergente. Pour tout $x \in]-1,1[$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Exercice 25 (⋆⋆)

En utilisant le développement en série entière de la fonction arctan, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 26 (⋆⋆⋆)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge, et on pose pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{S}_n x^n$.

b. En déduire que $\lim_{x\to 1} f(x) = \mathrm{S}$.

Espaces vectoriels normés

Normes

Exercice 1 (⋆)

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\| = \sup\left\{\left|P'(t) - P(t)\right| \;\middle|\; t \in [0,1]\right\}$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}[X]$. S'agit-il d'une norme sur l'espace $\mathscr{C}^0([0,1] \to \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$?

Exercice 2 (⋆)

Montrer que $N : (x,y) \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner la sphère unité.

Exercice 3 (⋆⋆)

Montrer que $N : (x,y) \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner la sphère unité.

Exercice 4 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel réel, et $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
- pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0_E$.

Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble $B = \left\{x \in E \;\middle|\; N(x) \leqslant 1\right\}$ est convexe.

Exercice 5 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$ on note $\overline{B}(a,r)$ la boule fermée de centre a de rayon r. Prouver les implications suivantes :

a. $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,s) \Longrightarrow \|a-b\| \leqslant s-r$;

b. $\overline{B}(a,r) \cap \overline{B}(b,s) = \varnothing \Longrightarrow \|a-b\| > r+s$.

Exercice 6 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$ on note $\overline{B}(a,r)$ la boule fermée de centre a de rayon r. Prouver l'implication suivante : $\overline{B}(a,r) = \overline{B}(b,s) \Longrightarrow a = b$ et $r = s$.

Topologie d'un espace vectoriel normé

Exercice 7 (⋆)

Soient A et B deux parties d'un même espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, \qquad \mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 8 (⋆)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \setminus A)$.

Exercice 9 (⋆)

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont E et $\varnothing$.

Exercice 10 ($\ast$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

a. Montrer que le seul sous-espace vectoriel ouvert de E est E lui-même.

b. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{O}) = \mathrm{E}$.

Exercice 11 ($\ast$)

Justifier que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12 ($\ast\ast$)

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

a. Montrer que $\overline{\mathrm{A}}$ est convexe.

b. Montrer que $\mathring{\mathrm{A}}$ est convexe.

Limite et continuité

Exercice 13 ($\ast$)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite de matrices $\mathrm{U}_n = \mathrm{I} + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $\mathrm{I} - \mathrm{A}$ est inversible et que $\mathrm{B} = (\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$.

Exercice 14 ($\ast$)

Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 15 ($\ast$)

On considère deux réels $(p, q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = px + q$ et les deux demi-plans

$$\mathcal{P}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < px + q\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > px + q\right\}$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue telle que $f(a) \in \mathcal{P}_1$ et $f(b) \in \mathcal{P}_2$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $f(c) \in \mathcal{D}$.

Exercice 16 ($\ast\ast$)

Soit C une partir convexe d'un espace vectoriel normé E, et $f : \mathrm{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient a et b deux points de C, et y un réel vérifiant : $f(a) < y < f(b)$. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{C}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 17 ($\ast\ast$)

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il toujours une application continue $\phi : [0, 1] \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi(0) = \mathrm{A}$ et $\phi(1) = \mathrm{B}$?

Exercice 18 ($\ast\ast$)

Soit A une partie non vide de E, et $x \in \mathrm{E}$. On pose $\mathrm{d}(x, \mathrm{A}) = \inf\left\{\|x - a\| \;\middle|\; a \in \mathrm{A}\right\}$.

a. Justifier que si A est fermé et borné, il existe pour tout $x \in \mathrm{E}$ un point $a_0 \in \mathrm{A}$ tel que $\|x - a_0\| = \mathrm{d}(x, \mathrm{A})$, puis montrer que cette propriété reste vraie lorsqu'on suppose uniquement A fermé.

b. Soient A et B deux parties fermées d'un même espace vectoriel normé E tels que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{V}$ et $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \varnothing$.

Exercice 19 ($\ast\ast$)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et A une partie fermée et bornée de E. Montrer l'existence de $(a, b) \in \mathrm{A}^2$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathrm{A}^2$, $\|x - y\| \leqslant \|a - b\|$.

Exercice 20 (⁎⁎)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O=(0,0)$ et de rayon r.

a. Montrer qu'il existe deux points A et B diamétralement opposés de $\mathcal{C}$ tels que $f(\mathrm{A})=f(\mathrm{B})$.

b. Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour, tels que $f(\mathrm{C})=f(\mathrm{D})$.

Dérivabilité

Exercice 21 (⁎)

Soit E un espace euclidien et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{E}$ une fonction deux fois dérivable, telle que la fonction $t\mapsto\|f(t)\|$ soit constante. Montrer que pour tout $t\in\mathrm{I}$, $\langle f(t)\mid f''(t)\rangle\leqslant 0$.

Exercice 22 (⁎)

On considère une fonction vectorielle $\mathrm{A}:\mathrm{I}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que pour tout $t\in\mathrm{I}$, la matrice $\mathrm{A}(t)$ soit inversible.
On peut donc définir la fonction $f:\mathrm{I}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant : $\forall t\in\mathrm{I}$, $f(t)=\mathrm{A}(t)^{-1}$.
On admet que f est de classe $\mathscr{C}^1$; calculer $f'(t)$ pour $t\in\mathrm{I}$.

Exercice 23 (⁎)

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\det\big(f(a),f(b),f'(c)\big)=0$.

Exercice 24 (⁎⁎⁎)

Soit $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $t\in\mathrm{I}$, $|f(t)|=1$. Montrer l'existence d'une fonction $\theta:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $t\in\mathrm{I}$, $f(t)=\mathrm{e}^{i\theta(t)}$.

Exercice 25 (⁎)

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on considère le déterminant :

$$\mathrm{D}_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots\\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Justifier que D_n est une fonction dérivable et calculer $\mathrm{D}_n'(x)$. En déduire l'expression de $\mathrm{D}_n(x)$.

Arcs paramétrés

Exercice 26 (⁎)

Soit $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^2$ tel que pour tout $t\in\mathrm{I}$, $f''(t)$ est colinéaire à $f(t)$ (mouvement à *accélération centrale*).
Pour tout $t\in\mathrm{I}$, on pose $\sigma(t)=f(t)\wedge f'(t)$. Montrer que σ est une fonction vectorielle constante.
En déduire que s'il existe $t_0\in\mathrm{I}$ tel que la famille $\big(f(t_0),f'(t_0)\big)$ soit libre, la trajectoire est plane.

Exercice 27 (⁎)

Étudier puis tracer l'arc paramétré d'équations $\begin{cases}x(t)=\cos(3t)\\ y(t)=\sin(2t)\end{cases}$

Exercice 28 ($\star$)

Étudier puis tracer l'arc paramétré d'équations $\begin{cases} x(t) = (1-t)^2\,\mathrm{e}^t \\ y(t) = 2(1-t)\,\mathrm{e}^t \end{cases}$

Exercice 29 ($\star\star$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré régulier ne passant pas par l'origine O. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que la distance $\mathrm{OM}(t_0)$ soit minimale. Montrer que la tangente à l'arc en t_0 est perpendiculaire à la droite $\mathrm{OM}(t_0)$.

Exercice 30 ($\star\star$)

On considère l'arc de $\mathbb{R}^3$ paramétré par

$$x(t) = \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t} \qquad y(t) = \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} \qquad z(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$$

a. Montrer que cette courbe est tracée sur une sphère.

b. Traver la projection de cette courbe sur le plan $(\mathrm{O}xy)$.

c. Démontrer que cette courbe coupe les parallèles de la sphère suivant un angle constant (c'est une *loxodromie* de la sphère).

Intégration

Intégration des fonctions continues par morceaux

Exercice 1 (⋆)

Soit $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (⋆)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Établir que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\ell$.

Exercice 3 (⋆)

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

Exercice 4 (⋆)

Soit $k\geqslant 2$ un entier fixé. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}\right)$.

Exercice 5 (⋆⋆)

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)$.

Exercice 6 (⋆⋆)

Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln|x-\mathrm{e}^{it}|\,\mathrm{d}t$ en utilisant une somme de Riemann.

Dérivation et intégration

Exercice 7 (⋆)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et $g:x\mapsto\displaystyle\int_0^x\sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $g'(x)=\displaystyle\int_0^x\cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $x''+x=f(x)$.

c. Quel est l'ensemble des solutions de cette équation différentielle ?

Exercice 8 (⋆)

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant : $\forall t\in[a,b]$, $f(a+b-t)=f(t)$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 (⋆)

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$, et en déduire $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 10 (⋆)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), et calculez u_0 et u_1.

Exercice 11 (⁎⁎)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Soit $g : x \mapsto x \displaystyle\int_a^x (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t + (1-x)\int_x^b tf(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et que $g'' = f$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que h_n est de classe $\mathscr{C}^n$ et que $h_n^{(n)} = f$.

Exercice 12 (⁎⁎)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f ne s'annule pas sur $]a,b[$.

a. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(c)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. **Application**. Soit g une fonction continue au voisinage de 0. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 (⁎⁎)

Pour $0 < a < b$ déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1-\cos(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14 (⁎)

Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 15 (⁎⁎⁎)

a. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]a,b[$.

c. Soit $n \geqslant 2$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]a,b[$.

Exercice 16 (⁎⁎⁎)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue à valeurs strictement positives, et $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer l'existence d'une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{I}}{n}$.

b. Quelle est la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$?

Exercice 17 (⁎⁎⁎)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $\mathrm{M}_2 = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} \|f''(t)\|$.

Montrer que : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_2 \frac{(b-a)^3}{12}$. On pourra procéder à deux intégrations par parties successives.

Exercice 18 (⁎⁎)

Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$. Trouver la limite de f lorsque x tend vers 0.

Exercice 19 (∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$, et $s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$. Déterminer la limite de la suite (s_n).

Exercice 20 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose $\mathrm{M}_0 = \|f\|_\infty$ et $\mathrm{M}_2 = \|f''\|_\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$, établir que pour tout $h > 0$,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2\mathrm{M}_0}{h} + \frac{h\mathrm{M}_2}{2}$$

puis en déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$.
En utilisant cette fois les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ ainsi qu'entre x et $x-h$, établir que

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\mathrm{M}_0}{h} + \frac{h\mathrm{M}_2}{2}$$

et en déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$.

Intégrales généralisées

Exercice 21 (∗)

Déterminer sans recourir à la recherche de primitives la convergence ou non des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22 (∗)

Justifier l'existence puis calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23 (∗)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que les intégrales suivantes soient convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24 (∗)

Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ln(t+\mathrm{e}^{-\beta t})\,\mathrm{d}t$$

Exercice 25 ($\star\star$)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, telle que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)^2\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu'il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 26 ($\star\star$)

À l'aide d'une intégration par parties, prouver que l'intégrale de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 27 ($\star$)

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge puis calculer sa valeur en utilisant le changement de variable $u = 1/t$.

b. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}$.

Exercice 28 ($\star$)

Justifier l'existence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$, puis montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.

Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, et en déduire la valeur de I.

Exercice 29 ($\star\star$)

Soient α et β deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Soit $x > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 30 ($\star\star$)

a. Justifier l'existence de : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b. Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

À l'aide de la formule : $\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$, montrer que $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 31 ($\star\star$)

Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone et intégrable sur $[0,1[$, et $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 32 ($\star\star$)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\big(f(t) - f(t+1)\big)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 33 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,dt$.

b. On suppose de plus f' intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

c. Soit $\alpha > 1/2$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 34 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.

On pose $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{T}} \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,dt$ et $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \lambda x$.

a. Montrer que la fonction F est T-périodique.

b. Soit $\alpha > 0$. Démontrer la convergence puis l'égalité des intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{f(t)-\lambda}{t^\alpha}\,dt$ et $\mathrm{J} = \alpha \displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{\mathrm{F}(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$.

Exercice 35 (∗)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable. Montrer que pour tout $h > 0$ la série $\sum hf(nh)$ converge, puis calculer la limite $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} hf(nh)$.

Le théorème de convergence dominée

Exercice 36 (∗)

Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n + e^t}$.

Exercice 37 (∗)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\,dt$.

Exercice 38 (∗∗)

Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,dx$.

Exercice 39 (∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nt^n f(t)\,dt = f(1)$.

Exercice 40 (∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Déterminer la limite de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,dt$.

b. On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que $\mathrm{I}_n = f(0) + \displaystyle\int_0^1 \left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right) f'(u)\,du$.

c. En déduire que $\mathrm{I}_n = f(0) - \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^1 \ln(u) f'(u)\,du + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 41 (∗)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée, telle que $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 42 (∗∗)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour la seconde intégrale, vous pourrez considérer la suite de fonctions (f_n) définie par : $f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

Exercice 43 (∗)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f et f' soient bornées. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ existe, et calculer $\ell = \lim\limits_{+\infty} \mathrm{I}_n$.

On suppose $f'(0) \neq 0$. Donner un équivalent de $(\mathrm{I}_n - \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 44 (∗)

Calculez la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on considérera la fonction $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Exercice 45 (∗)

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$.

Exercice 46 (∗)

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$ (utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$).

Exercice 47 (∗∗)

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 48 (∗∗)

On pose pour $n \geqslant 1$: $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. Justifier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 49 (⁎⁎)

Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs, divergeant vers $+\infty$. On considère la fonction suivante :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}.$$

a. Quel est l'ensemble de définition de S ? Y-est-elle continue ?

b. On suppose la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ convergente. Montrer que S est intégrable sur $]0,+\infty[$, et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

c. On ne suppose plus la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ convergente. Montrer que le résultat précédent subsiste.

Exercice 50 (⁎⁎⁎)

a. Justifier l'existence de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$, puis montrer que $K = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t\, \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

b. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t\, \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$, et en déduire que $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 51 (⁎⁎⁎)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Justifier l'existence puis calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Indication : écrire $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, *puis établir successivement que* $u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ *et enfin que* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$.

Intégrales à paramètre

Exercice 52 (⁎⁎)

Montrer la continuité de l'application définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ puis préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

Exercice 53 (⁎⁎)

Soit $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue. Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \int_0^1 \frac{x h(t)\,\mathrm{d}t}{x^2+t^2} = \frac{\pi}{2} h(0)$.

Exercice 54 (⁎)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \arctan t\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ puis en donner un équivalent en 0 et en $+\infty$.

Exercice 55 (⁎)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f'(x)$, et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 56 (⁎)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. En déduire une expression de g sans symbole intégral (on admettra que $g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 57 (∗)

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Montrer qu'elle est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par g sur $]0,+\infty[$.

Exercice 58 (∗∗)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$.

a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. f est-elle continue sur cet intervalle ? Dérivable ?

b. On pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Exprimer f à l'aide de h et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 59 (∗∗)

On pose quand c'est possible $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f. Est-elle continue sur $\mathcal{D}$? De classe $\mathscr{C}^1$?

b. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

c. Donner un équivalent de f en $(-1)^+$.

Exercice 60 (∗∗)

On pose pour $x \geqslant 0$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer explicitement $f'(x)$ pour en déduire $f(x)$.

Exercice 61 (∗∗)

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2+\sin^2 t)\,dt$. Quel est son ensemble de définition ? g y-est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$? Exprimer g sans symbole intégral.

Exercice 62 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\,dt$, et en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Probabilités

Dénombrement

Exercice 1 (∗)

Soit E un ensemble de cardinal n, et A une partie de E à p éléments. Dénombrer les parties X de E vérifiant :

a. $A \cap X = \varnothing$;

b. $A \cup X = A$;

c. $A \cap X = A$;

d. $A \cup X = E$.

Exercice 2 (∗)

Soit E un ensemble de cardinal n.

a. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.

b. En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \varnothing$.

c. En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E deux-à-deux disjointes telles que $A \cup B \cup C = E$.

d. Généraliser la formule précédente à un nombre p de parties de E.

Exercice 3 (∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.
Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, et en déduire l'expression de u_n.

Exercice 4 (∗∗)

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

a. Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.

b. Pour $n \geqslant 3$ on suppose $p < n$ et on considère un élément a de E.

En observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, établir la relation :

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p\right).$$

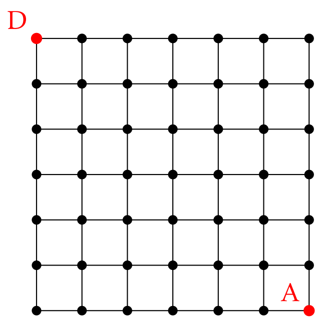
c. En déduire que $S_n^p = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$. Quelle formule obtient-on en prenant $n = p$?

Exercice 5 (∗∗)

Soit E un ensemble à np éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.

Exercice 6 (∗)

On considère une grille carrée de taille $n \times n$, sur laquelle on ne peut se déplacer que d'une unité à la fois, et ce uniquement de la gauche vers la droite ou de haut en bas. Combien y-a-t-il de chemins reliant le point D au point A ?



Exercice 7 (∗∗∗)

Montrer que le nombre de façons de placer p boules indiscernables dans q urnes discernables est égal à $\binom{p+q-1}{q-1}$.

Exercice 8 (∗∗)

a. Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leqslant n$?

b. Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_p \leqslant n$?

Indication : utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 9 (∗)

À l'occasion de la coupe de France on organise un tirage au sort entre n équipes de football de 1re division et n équipes de 2e division (chaque équipe joue un seul match).

a. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de première division à une équipe de seconde division.

b. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

Espaces probabilisés

Exercice 10 (∗)

Soit $\mathscr{A}$ une tribu de $[0,1]$ contenant tous les segments $[a,b]$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

a. Montrer que $\mathscr{A}$ contient tous les intervalles ouverts $]a,b[$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, ainsi que tous les singletons $\{\alpha\}$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

b. On suppose que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $([0,1], \mathscr{A})$ vérifiant : $\mathbb{P}([a,b]) = b-a$ pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Calculer $\mathbb{P}(]a,b[)$ et $\mathbb{P}(\{\alpha\})$.

Exercice 11 (∗)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisé, et (A_n) une suite d'événements. Traduire en notations ensemblistes les événements suivants :

a. l'un au moins des événements A_n est réalisé ;

b. tous les événements A_n sont réalisés ;

c. il existe un rang à partir duquel tous les événements A_n sont réalisés ;

d. une infinité d'événements parmi les A_n sont réalisés ;

e. seul un nombre fini d'événements A_n sont réalisés ;

f. une infinité d'événements parmi les A_n ne sont pas réalisés.

Exercice 12 (∗∗)

Soit (A_n) une suite d'événements d'un même espace probabilisé.

a. Montrer que les ensembles suivants sont des événements :

- A = « à partir d'un certain rang tous les A_n sont réalisés » ;
- B = « il y a une infinité d'événements parmi les A_n qui sont réalisés » ;
- C = « il n'y a jamais deux événements consécutifs réalisés ».

b. On suppose les événements A_n mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et montrer sans la calculer que $0 < \mathbb{P}(C) < 1$.

Exercice 13 (⁎⁎⁎)

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

b. On suppose la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ divergente. Que dire de l'événement $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n$?

c. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue une succession infinie de tirages. Après chaque tirage on remet la boule tirée et on en ajoute une rouge. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins une fois la boule noire ?

d. Quelle est la probabilité que la boule noire soit tirée une infinité de fois ?

Exercice 14 (⁎)

a. Vérifier qu'on définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^n}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note A_k l'événement : « n est un multiple de k ».

b. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

c. Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.

d. On note B l'événement « n est un nombre premier ». Montrer que $\dfrac{13}{32} < \mathbb{P}(B) < \dfrac{34}{63}$.

Conditionnement et indépendance

Exercice 15 (⁎)

a. Une urne contient p boules rouges et q boules vertes. On tire sans remise les boules, et on s'arrête lorsqu'on a tiré toutes les boules vertes. Déterminer la probabilité d'avoir retiré toutes les boules.

b. Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire les boules deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide. Déterminer la probabilité de tirer à chaque étape une boule rouge et une boule blanche.

Exercice 16 (⁎)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire dans cette urne une boule, puis on la remet accompagnées de deux autres boules de la même couleur. On répète ensuite cette opération indéfiniment.

a. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient blanches ?

b. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules blanches ?

Exercice 17 (⁎⁎)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et $(A, B) \in \mathscr{A}^2$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Exercice 18 (⁎)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A, B) \in \mathscr{A}^2$.

a. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B)^2 \leqslant \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

b. Si $\mathbb{P}(A) > 0$, montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A \cap B \mid A)$.

c. Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, montrer que $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \mid B) \Longrightarrow \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B \mid A)$.

Exercice 19 (∗)

On considère deux urnes U_1, contenant n_1 boules noires et b_1 boules blanches, et U_2, contenant n_2 boules noires et b_2 boules blanches. On choisit de façon équiprobable l'une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs avec remise. Soit N_1 l'événement « tirer une boule noire au premier tirage » et N_2 l'événement « tirer une boule noire au second tirage ».

a. Quelle est la probabilité de N_1 ? de N_2 ? de $N_1 \cap N_2$?

b. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 20 (∗)

Alice porte le gène de l'hémophilie avec une probabilité de 0,5. Si elle est porteuse, chacun de ses fils aura une chance sur deux de souffrir de cette maladie. Sachant qu'Alice a eu trois fils et qu'aucun n'est hémophile, quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse du gène ? Et s'il nait un quatrième fils, avec quelle probabilité sera-t-il hémophile ?

Exercice 21 (∗)

Un sac contient 100 dés dont 25 sont pipés. Un dé pipé a une chance sur deux de donner le chiffre 6.

a. On prend un dé au hasard et on le lance. On obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b. On prend un dé au hasard et on le lance n fois. On obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

Exercice 22 (∗)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, \dots, U_n$, l'urne U_k contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires.

a. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

b. On choisit une urne au hasard et on tire une boule. Celle-ci est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne U_k ?

c. On choisit une urne au hasard et on tire successivement avec remise deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

d. On suppose $n \geqslant 2$. On choisit une urne au hasard et on tire successivement sans remise deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

Exercice 23 (∗)

Une puce se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse $a \in [\![0, N]\!]$. À chaque instant elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité $p \in]0, 1/2[$ ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1-p$. Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités de l'intervalle 0 ou N.
On note u_a la probabilité pour que la puce, partant de a, s'arrête en 0.

a. Que vaut u_0 ? u_N ?

b. Lorsque $0 < a < N$, exprimer u_a en fonction de u_{a-1} et u_{a+1}.

c. En déduire l'expression générale de u_a.

d. Calculer la probabilité v_a pour que la puce, partant de a, s 'arrête en N.

e. Calculer $u_a + v_a$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 24 (⁎⁎)

Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{P}\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour quelle valeur de λ l'application P détermine-t-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\mathbb{N}^*))$? On suppose désormais cette valeur choisie.

b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on considère l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.

c. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est indépendante.

d. En calculant de deux manière $\mathbb{P}(\{1\})$ en déduire que $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$, où $\displaystyle\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

Exercice 25 (⁎⁎)

Alice et Bob jouent des parties indépendantes numérotées $1, 2, \ldots$. La probabilité qu'Alice gagne est égale à p et celle que Bob gagne à $q = 1 - p$.
On note a_{2n} la probabilité qu'il y ait égalité à la date $2n$, et b_{2n} la probabilité que la première égalité ait lieu à la date $2n$.
On pose $\displaystyle A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $\displaystyle B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n}x^{2n}$.

a. Exprimer a_{2n} en fonction de n.

b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $A(x)$.

c. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1$.

d. Établir une identité vérifiée par A et B, puis expliciter $B(x)$.

e. En admettant que B soit définie et continue en 1, déterminer la probabilité qu'il n'y ait jamais égalité.

Variables aléatoires

Exercice 26 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie $\mathbb{P}(X = j \text{ et } Y = k) = a\dfrac{j+k}{2^{j+k}}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer la valeur de a.

b. Reconnaître les lois marginales de X et Y.

c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 27 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 28 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 29 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2.
Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 30 ($\ast$)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique. Trouver la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ soit nilpotente.

Exercice 31 ($\ast$)

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, et N une variable aléatoire indépendante des X_i et suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Exercice 32 ($\ast\ast$)

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. On suppose que les variables X et $f(X)$ sont indépendantes. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(f(X) = n) = 1$.

Espérance et variance

Exercice 33 ($\ast\ast$)

On considère un jeu de Pile ou Face infini avec une pièce possédant la probabilité $p = \dfrac{2}{3}$ de tomber sur Face, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face consécutifs pour la première fois. Pour $n \geqslant 1$ on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

a. Calculer p_1 et p_2.

b. Pour $n \geqslant 3$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1} et p_{n-2}, et en déduire l'expression de p_n.

c. Calculer enfin $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 34 ($\ast$)

Un joueur joue à une partie et gagne avec une probabilité p dans $]0,1[$. On note L_1 la longueur de la première liste de parties toutes gagnées ou toutes perdues et L_2 la longueur de la deuxième liste.
Par exemple, pour la séquence suivante : GGGPPG on a $L_1 = 3$ et $L_2 = 2$.

a. Déterminer la loi de L_1 et son espérance.

b. Déterminer la loi de L_2 et son espérance.

c. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 35 ($\ast$)

On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

a. Que vaut $\mathbb{P}(X \geqslant k)$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X)}{N}$.

Exercice 36 ($\ast\ast$)

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ on note T_m la variable aléatoire du m^e succès, autrement dit $T_m = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; X_1 + \cdots + X_k = m\right\}$.
Déterminer la loi et l'espérance de T_m.

Exercice 37 ($\ast$)

a. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

b. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Exercice 38 (⁎⁎)

On dispose de k dés équilibrés. On les lance et on ne garde que ceux qui n'ont pas amené un 6. On recommence avec les dés restants jusqu'à ce qu'ils soient tous retirés.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qui seront effectués. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant n)$, et en déduire $\mathbb{P}(X = n)$.

b. Déterminer l'espérance de X lorsque $k = 2$.

Exercice 39 (⁎⁎)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, indépendantes et de même loi.
On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1 + X_2}$.

a. Montrer que Y_1 admet une espérance, puis la calculer.

b. Montrer que Y_1 admet une variance, puis exprimer la covariance de Y_1 et Y_2 en fonction de celle-ci.

Exercice 40 (⁎⁎)

Soit X une variable aléatoire bornée, et X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
On suppose que X_1X_2 suit la même loi que X^2. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 41 (⁎⁎⁎)

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $Y_n = \min(X_1,\ldots,X_n)$, $Z_n = \max(X_1,\ldots,X_n)$, $\alpha_n = \mathbb{E}(Y_n)$ et $\beta_n = \mathbb{E}(Z_n)$.

a. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.

b. Exprimer α_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent de β_n.

Exercice 42 (⁎⁎)

Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$.
On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ et on considère $\epsilon > 0$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = (\operatorname{ch} t)^n$.

b. Montrer que pour tout $t > 0$, $\operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}$.

c. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\epsilon\right)$.

d. En déduire que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp(-n\epsilon^2/2)$.

Exercice 43 (⁎⁎⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et réelles admettant un moment d'ordre 2.

a. On suppose $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(Y^2) > 0$, et on pose $Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Lipschitz à Y et Z, Montrer que $\mathbb{P}(Y > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$.

b. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(X - \mathbb{E}(X) < \epsilon\right) \geqslant \dfrac{\epsilon^2}{\mathbb{V}(X) + \epsilon^2}$, puis l'inégalité de Cantelli :

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \epsilon^2}$$

Exercice 44 (⁎⁎)

On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) *converge en probabilité* vers une variable aléatoire X lorsque pour tout $\epsilon > 0$, $\lim \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0$.

a. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, un réel m et une suite de variables aléatoires (X_n) possédant toutes un moment d'ordre 2 et telle que :

- La suite $(\mathbb{E}(X_n))$ converge vers m ;
- La suite $(\mathbb{V}(X_n))$ converge vers 0.

Montrer que (X_n) converge en probabilité vers $X = m$;

b. Soit S_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On pose $Y_n = \exp(S_n/n)$. Montrer que (Y_n) converge en probabilité vers $Y = \exp(p)$.

Séries génératrice

Exercice 45 (⁎)

Soient $p \in]0,1[$ et $r \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(r)$. On définit une nouvelle variable aléatoire U en posant $U = 0$ si $X = 0$ et $U = Y$ si $X = 1$.
Déterminer la série génératrice de U et en déduire $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$.

Exercice 46 (⁎)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k$ avec $a > 0$ et $p \in]0,1[$.

a. Calculer la fonction génératrice G_X de X et en déduire la valeur de a.

b. Calculer espérance et variance de X.

Exercice 47 (⁎⁎⁎)

On considère deux variables aléatoires entières N et X, ainsi qu'une suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ de variables aléatoires entières indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

a. Montrer que les séries génératrices de X, N et Y vérifient la relation : $G_Y = G_N \circ G_X$.

b. En déduire que si N et X admettent une espérance, il en est de même de Y, et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ (formule de Wald).

Espaces euclidiens

Produit scalaire

Exercice 1 (∗)

Soit E un espace euclidien, $a \in \mathrm{E}$ tel que $\|a\| = 1$, et $k \in \mathbb{R}$. On définit $\phi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \phi(x,y) = \langle x \mid y \rangle + k\langle x \mid a \rangle \langle y \mid a \rangle.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante ϕ est-il un produit scalaire ?

Exercice 2 (∗∗)

Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable.

On définit la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{A}_{ij} = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f_i(t) g_i(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que l'application $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 3 (∗)

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Prouver que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Dans quel cas y-a-t'il égalité ?

Exercice 4 (∗∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4 \int_0^1 t^2 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Projection orthogonale

Exercice 5 (∗)

On considère un espace euclidien E de dimension 3 muni d'une base orthonormée (e). On note P le plan d'équation : $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ dans cette base, p la projection orthogonale sur P, et v le vecteur de coordonnées (x,y,z) dans la base (e). Déterminer une base orthonormée (e_1', e_2') de P, en déduire l'expression du vecteur $p(v)$ dans la base (e), puis la matrice associée à p dans la base (e).

Exercice 6 (∗)

On considère un espace euclidien E de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. Déterminer la matrice associée dans la base (e) à la projection vectorielle sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 7 (∗)

Montrer que l'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, et utiliser cette remarque pour calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^k - at - b)^2\,\mathrm{d}t$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

Exercice 8 (∗)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle \mathrm{M} \mid \mathrm{N} \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{N})$, on pose $\mathrm{H} = \left\{ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0 \right\}$, et on note J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

Exercice 9 (∗)

Soit p une projection d'un espace euclidien E ; montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale si et seulement si pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$.

Exercice 10 (⁎⁎)

Soit p une projection vectorielle d'un espace euclidien E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x \in \mathrm{E}, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 11 (⁎⁎⁎)

On munit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ du produit scalaire $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, et on note $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$.

a. Calculer $\mathrm{P}_k(0)^2$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. On note $\mathrm{H} = \left\{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \,\middle|\, \mathrm{P}(0) = 0\right\}$. Quelle est la dimension de H ? Déterminer une base de $\mathrm{H}^\perp$ à l'aide des $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n$.

c. Déterminer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2\,\mathrm{d}t \,\middle|\, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Espaces euclidiens

Exercice 12 (⁎)

Soit E un espace eucldien, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle x \mid u(x) \rangle = 0$. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 13 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien de dimension n. À $(x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{E}^p$ on associe le *déterminant de Gram* :

$$\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) = \det\Big(\langle x_i \mid x_j \rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}.$$

Montrer que $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) = \det(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A})$, où $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_p)$ et (e) une base orthonormée quelconque de E. En déduire que $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée.

Exercice 14 (⁎⁎)

Soient (e) et (f) deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que la quantité $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i \mid u(e_j) \rangle^2$ ne dépend pas de (e) et (f).

Exercice 15 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien de dimension n, et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs tels que pour tout $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| = 1$. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Exercice 16 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \|u_i - u_j\| = 1$.

a. Montrer que ces conditions sont équivalentes à : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \langle u_i \mid u_j \rangle = 1/2$.

b. Conclure en raisonnant par récurrence.

Exercice 17 (⁎⁎⁎)

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Une famille de p vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque $i \neq j \Longrightarrow \langle x_i \mid x_j \rangle < 0$. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que $p \leqslant n + 1$.

Exercice 18 (⁎⁎)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note Q_n le polynôme $\dfrac{1}{2^n n!}\Big((X^2-1)^n\Big)^{(n)}$.

a. Exprimer le degré et le coefficient dominant de Q_n, et déterminer les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

b. On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis que pour tout $n \geqslant 1$, Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c. Calculer $\|Q_n\|$.

d. Exprimer à l'aide de la famille (Q_n) la famille obtenue lorsqu'on applique la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19 (⁎⁎⁎)

Soit E un espace euclidien de dimension n, $(u_1,\dots,u_n)$ une base de E, et $(e_1,\dots,e_n)$ la base orthonormée obtenue par le procédé de Schmidt à partir de $(u_1,\dots,u_n)$. On note $R = \mathrm{Mat}_e(u_1,\dots,u_n)$ la matrice des composantes dans la base (e) de la famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_n)$.

a. Justifier l'affirmation : « R est une matrice triangulaire supérieure », et en déduire que $|\det R| \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|u_i\|$.

On considère maintenant une matrice inversible $A = (a_{ij}) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

b. Démontrer l'existence d'une matrice orthogonale Q et d'une matrice triangulaire supérieure R vérifiant : $A = QR$.

c. En déduire que si les coefficients de A vérifient : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{ij}| \leqslant 1$, alors $|\det A| \leqslant n^{n/2}$. Peut-on avoir égalité ?

Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice 20 (⁎)

Soit E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$. On considère $u : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \lambda\langle x \mid a\rangle a \end{pmatrix}$.

À quelle condition a-t-on $u \in \mathcal{O}(E)$? Dans ce cas, décrire u.

Exercice 21 (⁎)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle M \mid N\rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$.
Soit $A \in E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(M) = AM$. À quelle condition u est-il une isométrie vectorielle de E ?

Exercice 22 (⁎)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, (e) une base orthonormée d'un espace euclidien E, et $u \in \mathcal{O}(E)$ défini par : $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. Justifier que $a_{ij} = \langle e_i \mid u(e_j)\rangle$, et en déduire que : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Exercice 23 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie vectorielle. On pose $v = u - \mathrm{Id}$.
Montrer que $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, v)^{\perp}$.

En déduire que la suite $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$ converge vers p, projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\, v$.

Exercice 24 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x \mid y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x) \mid u(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle $v \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = \lambda v$.

Exercice 25 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien. On considère des vecteurs $u_1,\dots,u_n$ et $v_1,\dots,v_n$ de E tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle u_i \mid u_j\rangle = \langle v_i \mid v_j\rangle$, et le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une isométrie vectorielle $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(u_i) = v_i$.

a. Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une base de E.

b. Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une famille génératrice de E.

c. Traiter l'exercice dans le cas général.

Exercice 26 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien et u et v deux endomorphismes symétriques qui commutent : $u \circ v = v \circ u$.
Soit λ une valeur propre de u, et E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par v, et que la restriction de v à E_λ est un endomorphisme symétrique de E_λ.
En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ et $\mathrm{Mat}_e(v)$ soient diagonales.

Exercice 27 (⋆⋆)

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Montrer que si p est impair il existe un unique endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$.

Exercice 28 (⋆⋆)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$, et $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $|\mathrm{tr}(\mathrm{AU})| \leqslant \mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 29 (⋆⋆⋆)

Soit A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

a. Montrer que $\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{Y}\rangle = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b. En appliquant la méthode de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer l'existence d'une matrice triangulaire supérieure M telle que $\mathrm{A} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}$.

c. En déduire que $\det \mathrm{A} \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 30 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ un endomorphisme symétrique tel que $\mathrm{tr}\, u = 0$.

a. Montrer l'existence d'un vecteur non nul $x \in \mathrm{E}$ tel que $\langle u(x) \mid x\rangle = 0$.

b. En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\langle u(e_i) \mid e_i\rangle = 0$. Que dire de la matrice associée à u dans la base (e) ?

Exercice 31 (⋆)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant : $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{A}$.
Montrer que $\mathrm{Im}\,\mathrm{A}$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et en déduire que $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ est un entier pair.

Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 (∗)

Étudier les solutions maximales des équations différentielles linéaires suivantes :

$$(1+t)x'+x=1+\ln(1+t) \qquad (1-t^2)x'-tx=t^3.$$

Exercice 2 (∗)

Résoudre sur un intervalle adéquat l'équation différentielle suivante : $(\sin t)^3x'-2(\cos t)x=0$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (∗)

Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et continues, telles que u soit impaire et v paire.
Montrer que l'équation différentielle $x'=u(t)x+v(t)$ possède une unique solution impaire.

Exercice 4 (∗∗)

a. Résoudre l'équation $t^2x'+x=t^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

On exprimera les solutions à l'aide de l'application $t\mapsto\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-1/u}\,\mathrm{d}u$, après avoir justifié la convergence de cette intégrale.

b. Montrer que l'équation admet une unique solution ayant une limite finie en 0. Quelle est cette limite ?

Exercice 5 (∗∗)

a. Résoudre l'équation différentielle $y'-y=\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

On exprimera la solution générale en fonction de $u(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t$.

b. Démontrer que toutes les solutions tendent vers 0 en $-\infty$ et qu'une seule solution admet une limite finie en $+\infty$. Quelle est cette limite ?

Exercice 6 (∗∗)

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : x'-x=\dfrac{1}{t}$ et ses solutions sur $]0,+\infty[$.

a. D'après le théorème de Cauchy, un point M de coordonnées (t_0,x_0) avec $t_0>0$ appartient au graphe $\mathscr{C}_{\mathrm{M}}$ d'une unique solution de $(\mathcal{E})$. Déterminer sans résoudre l'équation différentielle l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M pour lesquels la tangente à $\mathscr{C}_{\mathrm{M}}$ en M est horizontale, et l'ensemble $\mathscr{I}$ des points M qui sont points d'inflexion de $\mathscr{C}_{\mathrm{M}}$ (on admettra que les points d'inflexion sont exactement les points qui annulent la dérivée seconde).

b. Montrer que $\phi_0 : t\mapsto -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-s}}{t+s}\,\mathrm{d}s$ est solution de $(\mathcal{E})$; comment se situe son graphe vis à vis de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$?

c. Décrire enfin l'allure des différentes solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 7 (∗∗)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(f'(x)+f(x)\big)=0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Exercice 8 (∗∗∗)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a et b deux réels tels que $a > 0$.

a. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$ il existe un unique $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que $g' + ag = f$ et $g(0) = b$.

b. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors $\lim\limits_{+\infty} g(t) = 0$.

c. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et donner une relation liant $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 (∗∗)

Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et y et z solutions de :

$$y(0) = z(0) \qquad y' = a(t)y + b(t) \qquad z' \leqslant a(t)z + b(t).$$

Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $y(t) \geqslant z(t)$.

Systèmes différentiels du premier ordre

Exercice 10 (∗)

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x + 3y - 2z \\ y' = -3x + 5y - 2z \\ z' = -3x + 4y - z \end{cases}$$

Exercice 11 (∗∗)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}_n$. Résoudre le système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$; on exprimera les solutions en fonction de $\mathrm{X}(0)$ et $\mathrm{AX}(0)$.

Exercice 12 (∗∗)

Résoudre le système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ lorsque A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (∗)

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + 2y + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Exercice 14 (∗∗)

Soit u un vecteur non nul d'un espace euclidien E de dimension 3. Résoudre l'équation différentielle $x' = u \wedge x$. Quelle est la trajectoire de la courbe paramétrée par $t \mapsto x(t)$?

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 15 (∗)

Chercher une solution développable en série entière de l'équation : $xy'' + 2y' - xy = 0$ puis résoudre complètement cette équation.

Exercice 16 (∗)

Chercher une solution développable en série entière de l'équation : $x(1-x)y'' + (2-5x)y' - y = 0$ puis résoudre complètement cette équation.

Exercice 17 (∗)

Intégrer les équations différentielles suivantes sur des intervalles adéquats :

$$y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)\mathrm{e}^x \qquad\qquad y'' - y' - \mathrm{e}^{2x}y = e^{3x} \quad (\text{poser } t = \mathrm{e}^x)$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x \quad (\text{poser } t = \ln x)$$

Exercice 18 (∗∗)

Trouver sur solution particulière non nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle : $t^2x'' + x = 0$, et en déduire l'ensemble des solutions.

Quelles sont les fonctions dérivables $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ qui vérifient : $\forall t > 0,\ f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$?

Exercice 19 (∗∗)

Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(1-x) = f(1+x)$.

Exercice 20 (∗)

a. En faisant le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$ (c'est-à-dire en posant $y(u) = x(\mathrm{e}^u)$) résoudre l'équation différentielle $t^2x'' + tx' - x = 1$ sur $]0,+\infty[$.

b. À l'aide d'un changement de variable analogue, résoudre cette même équation différentielle sur $]-\infty,0[$.

Exercice 21 (∗∗)

Soit q une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. On note x_1 et x_2 deux solutions non identiquement nulles de $x'' + q(t)x = 0$.

a. On suppose que x_1 possède au moins deux zéros, et on en considère deux consécutifs t_1 et t_2. Montrer que :

- ou bien x_2 s'annule sur $]t_1,t_2[$;
- ou bien x_2/x_1 est constant sur $]t_1,t_2[$.

Indication. On pourra considérer le wronskien $\mathrm{W} : t \mapsto x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t)$.

b. En déduire que deux solutions linéairement indépendantes ne peuvent avoir de zéro en commun, et qu'entre deux zéros consécutifs de l'une se trouve exactement un zéro de l'autre.

Exercice 22 (∗∗)

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On considère l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$.

a. Soit y une solution bornée de l'équation. Montrer que y' tend vers 0 en $+\infty$.

b. Soient y_1 et y_2 deux solutions. Montrer que leur wronskien $w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ est constant.

c. En déduire que l'équation admet une solution non bornée.

Exercice 23 (∗∗∗)

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, à valeurs positives, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = \ell > 0$.

On considère une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$, ainsi que la fonction $\psi : x \mapsto \sin(\alpha x + \beta)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On note enfin $\mathrm{W} : x \mapsto \phi(x)\psi'(x) - \psi(x)\phi'(x)$.

a. Calculer $\mathrm{W}'(x)$.

b. Montrer que ϕ admet une infinité de zéros.

Calcul différentiel

Continuité

Exercice 1 (∗)

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2} \qquad f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}.$$

Exercice 2 (∗)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x^2+y^2 \leqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Calcul différentiel

Exercice 3 (∗)

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f : x \mapsto \|x\|$. En quels points cette application est-elle différentiable ? Préciser le vecteur gradient en ces points.

Exercice 4 (∗)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{P}) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa différentielle.

Exercice 5 (∗)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées partielles, mais que f n'est pourtant pas continue en ce point.

Exercice 6 (∗)

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 8 ($\ast$)

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Montrer que f vérifie la relation : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 9 ($\ast\ast$)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

a. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(x+t, y+t) = f(x,y)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

b. On suppose que pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = f(x,y)$. Montrer que $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 10 ($\ast\ast$)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application non nulle de classe $\mathscr{C}^1$.On dit que f est *homogène* s'il existe une application ϕ : $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$(\ast) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda > 0, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \phi(\lambda) f(x,y).$$

a. Montrer que si f est homogène, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha$.
Indication. Dériver l'égalité $(\ast)$ *par rapport aux variables x, y et λ.*

b. Montrer alors que f est homogène si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

c. Résoudre cette équation aux dérivées partielles à l'aide des coordonnées polaires.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 11 ($\ast$)

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$.

Exercice 12 ($\ast$)

En utilisant les coordonnées polaires résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x^2 + y^2 = f(x,y).$$

Exercice 13 ($\ast$)

Résoudre sur $\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0\right\}$ l'équation $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y)$ à l'aide des coordonnées polaires.

Exercice 14 ($\ast\ast$)

Résoudre sur $\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > y\right\}$ l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-y)f(x,y)$ en posant $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$.

Exercice 15 (∗)

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

Exercice 16 (∗)

Étant donné $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on considère l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où la fonction f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

a. Transformer l'équation par le changement de variables $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$.

b. Lorsque $b^2 - 4ac > 0$ montrer qu'on peut intégrer l'équation.

Exercice 17 (∗∗)

Résoudre sur un ouvert adéquat l'équation $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$.

Exercice 18 (∗∗)

On appelle *laplacien* de f la quantité $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$. Calculer-le en coordonnées polaires. Quels sont les fonctions *harmoniques* (c'est-à-dire vérifiant $\Delta f = 0$) et *isotropes* (ne dépendant pas de l'angle θ) ?

Extremums d'une fonction

Exercice 19 (∗)

Déterminer la valeur maximale sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]^2$ de $f : (x,y) \longmapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$.

Exercice 20 (∗)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + x^2 y + y^3$.

a. Montrer que f admet un point critique qui n'est pas un extremum local.

b. Soit $\mathcal{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$. Déterminer les extremums de f sur $\mathcal{K}$.

Exercice 21 (∗)

a. Soient x, y et z trois nombres réels positifs. Montrer qu'il est possible de construire un triangle dont les côtés sont de longueurs respectives x, y et z si et seulement si :

$$x < y + z, \qquad y < z + x, \quad \text{et} \quad z < x + y.$$

b. Un triangle variable a un périmètre p imposé, ses côtés ont pour longueur x, y et z.
On pose $F(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$. Déterminer le triangle pour lequel $F(x,y,z)$ est minimal, et donner la valeur de ce minimum.

Exercice 22 (∗∗∗)

Déterminer le périmètre maximal d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon R.

Applications géométriques

Exercice 23 (∗)

On considère la surface d'équation : $2(xz+yz)+x+2y+z-1=0$.
Déterminer son intersection avec son plan tangent en $(0,0,1)$.

Exercice 24 (∗)

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $z^2-x^2-y^2=1$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équations $(2x+y=0,\ z=0)$. Déterminer les points M de $\mathscr{S}$ tels que le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M soit parallèle à $\mathscr{D}$.