PC*

Lycée Marcelin Berthelot

Exercices

Algèbre linéaire

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (∗)

Soit $E = \mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $H = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0) = f'(0) = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E, et en trouver un supplémentaire.

Exercice 2 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_k \subset F_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tel que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = E$ (procéder par récurrence en commençant par traiter le cas $n = 2$).

Exercice 3 (∗∗)

Soit E un espace vectoriel, et H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = H_1 \oplus H_2$.
Pour tout $k \in \{1, 2\}$ on pose $\mathcal{H}_k = \left\{ u \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; \operatorname{Im} u \subset H_k \right\}$. Montrer que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}(E)$.

Projections vectorielles

Exercice 4 (∗)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.
Montrer que $v \circ u$ est une projection vectorielle, puis que $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

Exercice 5 (∗)

Soit E un espace vectoriel, et p et q deux projections vectorielles qui commutent. Montrer que $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 6 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projections vectorielles sur un même sous-espace H. Montrer que quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $u = \lambda p + (1 - \lambda) q$ est une projection vectorielle sur H.

Exercice 7 (∗∗∗)

Quelles sont les droites vectorielles stables par un projecteur ? En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie impaire et p et q deux projections vectorielles alors il existe une droite vectorielle stable à la fois par p et par q.

Familles génératrices, familles libres, bases

Exercice 8 (∗)

On considère une famille libre $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ d'un espace vectoriel E, et on définit la famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ en posant : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $v_k = u_k + u_{k+1}$ et $v_n = u_n + u_1$. Étudier la liberté de la famille $(v_1, \dots, v_n)$.

Exercice 9 (∗∗)

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de E. Montrer que la famille $(f_1', \dots, f_n')$ est au moins de rang $n - 1$.

Exercice 10 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel, $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires. On pose $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ et $x_i'=x_i+y$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Étudier à quelle condition la famille $(x_1',\dots,x_n')$ est libre.

Exercice 11 (⋆)

Soit E un espace vectoriel, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que pour tout $x\in\mathrm{E}$, la famille $\big(x,u(x)\big)$ est liée. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice 12 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel et $(v_1,\dots,v_n)\in\mathrm{E}^n$.
On note V le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\big\{v_i-v_j\;\big|\;(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\big\}$. Montrer que $\dim\mathrm{V}\leqslant n-1$.

Applications linéaires

Exercice 13 (⋆⋆)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On pose :

$$\mathcal{A}=\big\{v\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})\;\big|\;u\circ v\circ u=0\big\}.$$

a. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

b. Justifier l'existence d'une base (e) de E et d'une base (f) de F telles que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{I}_r & \mathrm{O}\\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O}\end{array}\right)$.

c. On note M la matrice définie ci-dessus. Pour $v\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$, on pose $\mathrm{N}=\mathrm{Mat}_{f,e}(v)$. À quelle condition, portant sur N, a-t-on $v\in\mathcal{A}$? En déduire la dimension de $\mathcal{A}$.

Exercice 14 (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose l'existence de $x_0\in\mathrm{E}$ tel que la famille $(e)=\big(x_0,u(x_0),\cdots,u^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.
Soit $v\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u\circ v=v\circ u$. Montrer l'existence de scalaires $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tels que

$$v=a_0\mathrm{Id}_\mathrm{E}+a_1u+a_2u^2+\cdots a_{n-1}u^{n-1}.$$

Indication. On pourra considérer la décomposition du vecteur $v(x_0)$ dans la base (e).

Exercice 15 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a. Montrer que pour tout projecteur p de E, $\mathrm{tr}(p)=\mathrm{rg}(p)$.

On considère désormais un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^m=\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, et on pose $p=\dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}u^k$.

b. Montrer que p est un projecteur de E (on pourra commencer par calculer $p\circ u$).

c. En déduire que $\dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{tr}(u^k)=\dim\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$.

Trace d'un endomorphisme

Exercice 16 (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} u = 1$. Montrer que $u^2 = (\operatorname{tr} u)u$, puis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = (\operatorname{tr} u)^{k-1} u$.

Exercice 17 (⋆)

Soit u une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$). Montrer l'existence d'une matrice A telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $u(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

Exercice 18 (⋆⋆)

Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(M) = M^T$.

Exercice 19 (⋆⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul tel que $\operatorname{tr} u = 0$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $b_1 \in E$ tel que $u(b_1)$ ne soit pas colinéaire à b_1.

b. En déduire l'existence d'une base (b) pour laquelle $\operatorname{Mat}_{(b)}(u)$ prend la forme suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{où } N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ vérifie } \operatorname{tr} N = 0.$$

c. En raisonnant par récurrence sur n, montrer alors l'existence d'une base (e) pour laquelle $\operatorname{Mat}_{(e)}(u)$ est une matrice à diagonale nulle.

Image et noyau d'une application linéaire

Exercice 20 (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\} \iff \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$ et $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u \iff \operatorname{Im} u = \operatorname{Im}(u^2)$.

Exercice 21 (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $\dim H_1 + \dim H_2 = \dim E$ si et seulement s'il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $H_1 = \operatorname{Ker} u$ et $H_2 = \operatorname{Im} u$.

Exercice 22 (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r telle que $A^2 = 0$.

Montrer que $r \leqslant n/2$ puis que A est semblable à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Exercice 23 (⋆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, H un sous-espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim u(H) \geqslant \dim H - \dim(\operatorname{Ker} u)$.

Exercice 24 (⋆)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v).$$

Indication. Considérer la restriction w de u à $\operatorname{Ker}(u+v)$.

Exercice 25 (⋆⋆)

Soient E, F, G et H quatre espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $h \in \mathcal{L}(G,H)$. Montrer que :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) + \operatorname{rg}(h \circ g) \leqslant \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(h \circ g \circ f)$$

Exercice 26 (⋆⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\operatorname{rg}(M) \geqslant r$.

b. Montrer que $\operatorname{rg} M = r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

Indication : s'intéresser au noyau de M *en réalisant un calcul par blocs.*

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 27 (⋆)

Pour $a \in \mathbb{K}^*$, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de A, et en déduire A^{-1} lorsque A est inversible, ainsi que A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 28 (⋆)

Pour $a \in \mathbb{K}$, on note $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$, ainsi que A^{-1}.

Exercice 29 (⋆)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 2\sin\theta \\ \dfrac{\sin\theta}{2} & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 (⋆)

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{A^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 31 (⋆⋆)

Déterminer la limite de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Sous-espaces stables

Exercice 32 (⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $B = \left(\begin{array}{c|c} O_n & A \\ \hline I_n & O_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Montrer que B est inversible si et seulement si A l'est, et calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 33 (⋆)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) = \det(A+B)\det(A-B)$.

Exercice 34 (⋆)

Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline A & I_n \end{array}\right) = \det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.

Exercice 35 (⋆)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36 (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ (u - \beta \mathrm{Id}_E) = 0$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $\alpha \neq \beta$. On pose $H_1 = \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$ et $H_2 = \mathrm{Ker}(u - \beta \mathrm{Id}_E)$.

Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par u, puis que $E = H_1 \oplus H_2$.
Que dire de la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition ? Montrer que $u = \alpha p + \beta(\mathrm{Id}_E - p)$, où p est la projection vectorielle sur H_1 parallèlement à H_2.

Exercice 37 (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c'est à dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$).

Établir que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$.
Établir que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, puis justifier que la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition est triangulaire à coefficients diagonaux nuls.

Exercice 38 (⋆⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = \mathrm{Id}$, $g^2 = \mathrm{Id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a. Montrer que E est de dimension paire. On pose $\dim(E) = 2p$.

b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_p \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 39 (⋆⋆⋆)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_k) = e_{k+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

Exercice 40 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $x \in E$, la famille $\Big(x, u(x)\Big)$ est liée.

b. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ qui laissent stable tout hyperplan de E.

Réduction des endomorphismes

Éléments propres

Exercice 1 (∗)

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $u(P) = (X-a)P' + P$.

Exercice 2 (∗)

Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme définie par $\phi(M) = M^T$. Déterminer les éléments propres (valeurs et sous-espaces propres) de ϕ.

Exercice 3 (∗∗)

On appelle *matrice stochastique* une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

- pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \in [0,1]$;
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

a. Montrer que 1 est valeur propre de A.

b. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 4 (∗)

Soit A la matrice d'un projecteur, et $\phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(AM+MA) \end{pmatrix}$.

a. Justifier l'existence de $r \in [\![0,n]\!]$ et de $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

b. Déterminer les éléments propres de ϕ. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Exercice 5 (∗∗)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $a_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$

a. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

b. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 (∗∗)

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & O & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{où } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{1,n\} \text{ ou } j \in \{1,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Polynôme caractéristique

Exercice 7 (∗)

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $M = CC^T$.
Quel est le rang de M ? En déduire le polynôme caractéristique de M. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 2. Exprimer le polynôme caractéristique de u en fonction de $\operatorname{tr} u$ et de $\operatorname{tr}(u^2)$.

Exercice 9 (∗∗)

Soit $n \geqslant 2$ un entier, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne non nul. Soit la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & C^T \\ \hline C & O_{n-1} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Déterminer le rang de A et en déduire que X^{n-2} divise le polynôme caractéristique de A.
b. Montrer que $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - \alpha X - \beta)$ en ayant posé $\beta = C^T C$.
c. Montrer que si $\beta = 0$ la matrice A n'est pas diagonalisable.
d. On suppose $\beta \neq 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 10 (∗∗)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la matrice $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

a. Montrer que $\chi_{A_{n+1}}(X) = (X - n)\chi_{A_n}(X) - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.
b. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(-1)^{n+k}\chi_{A_n}(k) > 0$.
c. En déduire que chaque intervalle $]0,1[,]1,2[, \ldots,]n-1, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de A_n.

Diagonalisation

Exercice 11 (∗)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.
Quelles sont les valeurs propres de A ? Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ lorsque $m = 2$.

Exercice 12 (∗)

Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$f(M) = (\operatorname{tr} A)M - (\operatorname{tr} M)A.$$

Déterminer les éléments propres de f. f est-il diagonalisable ? Et lorsque $\operatorname{tr} A = 0$?

Exercice 13 (∗)

On considère la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} O & -I_n \\ \hline I_n & O \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Calculer A^2. La matrice A est-elle diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? et lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Exercice 14 (⋆)

Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ pour lesquelles la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 15 (⋆)

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice associée à u prend la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} u \neq 0$.

b. Soient $u_1, \dots, u_n$ des réels non nuls, et $A = \left(\frac{u_i}{u_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 16 (⋆⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B = \left(\begin{array}{c|c} O & I_n \\ \hline A & O \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A. Montrer que si A est inversible et diagonalisable, il en est de même de B. Qu'en est-il si A est diagonalisable mais non inversible ?

Exercice 17 (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire que B est semblable à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & 2A \end{array}\right)$.

b. En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 18 (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.
À quelle condition existe-t-il $a \in E$ tel que $\left(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{n-1}(a)\right)$ soit une base de E ?

Polynômes annulateurs

Exercice 19 (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose l'existence d'un polynôme annulateur P de u vérifiant : $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 20 (⋆⋆)

Soient A, B et C trois matrices vérifiant les égalités suivantes : $C = A + B$, $C^2 = 2A + 3B$ et $C^3 = 5A + 6B$. Montrer que ces trois matrices sont diagonalisables.

Exercice 21 (⋆⋆)

Soient f, u, v trois endomorphismes d'un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f = \lambda u + \mu v, \qquad f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v, \qquad f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v.$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 22 (⋆⋆)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que BA est diagonalisable.

Projecteurs spectraux

Exercice 23 (⋆)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

c. En déduire les solutions de l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 24 (⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, de valeurs propres -1 et 2. Exprimer A^n en fonction de A et I_p.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de valeurs propres 0, 1 et 2. Exprimer A^n en fonction de I, A et A^2.

Commutant d'un endomorphisme

Exercice 25 (⋆⋆)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$.

Exercice 26 (⋆)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes non nuls, et $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f \circ g - g \circ f = af$.
Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\phi_g : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ en posant $\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_g(f^n) = naf^n$, et en déduire l'existence d'un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g, et en déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 27 (⋆⋆)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = M$. Montrer que $(\operatorname{tr} A)^3 = n$.

Exercice 28 (⋆⋆)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice A est diagonalisable, et en déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

b. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = A$.

c. Déterminer enfin les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P(A)^2 = A$.

Exercice 29 (⋆⋆)

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.
Justifier que l'induit de v sur chacun des sous-espaces propres de u est diagonalisable, et en déduire l'existence d'une base qui diagonalise à la fois u et v.

Exercice 30 (⋆⋆)

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v possèdent un vecteur propre en commun, et en déduire l'existence d'une base (e) sur laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{(e)}(v)$ sont toutes deux triangulaires supérieures (on pourra raisonner par récurrence sur $\dim \mathrm{E}$ pour prouver le second point).

Trigonalisation

Exercice 31 (⋆)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où λ et μ sont des valeurs à déterminer.
En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 32 (⋆)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 = -\mathrm{A}$. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0$.

Exercice 33 (⋆⋆⋆)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que la matrice $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ soit nilpotente.

Exercice 34 (⋆⋆⋆)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ et $\dim \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) = 2$.
Montrer l'existence d'une base (e) dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 35 (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

a. Donner un exemple d'un tel endomorphisme en dimension 2, par exemple en trouvant une matrice 2×2 vérifiant $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}$.

b. Montrer que u n'a pas de valeurs propres réelles, et en déduire que la dimension de E est paire.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel stable par u.

d. Montrer que si $\dim \mathrm{E} \geqslant 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_n, u(e_n))$ soit une famille libre de E (procéder par récurrence).

e. En déduire l'existence d'une base (b) pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(b)}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & -\mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \end{array}\right)$.

Suites et séries numériques

Suites numériques

Exercice 1 (⋆)

a. Trouver une suite strictement positive de limite nulle qui n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

b. Soit (u_n) une suite strictement positive de limite nulle. Montrer qu'elle admet une sous-suite décroissante.

Exercice 2 (⋆⋆)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim u_n^2 = 1$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| < 1$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 (⋆)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 0$. Montrer que $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Exercice 4 (⋆⋆)

Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ, et (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k$. Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite (*s'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro*).

Exercice 5 (⋆⋆⋆)

Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ, et $v_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$. Montrer que (v_n) converge vers ℓ.

Exercice 6 (⋆)

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et de la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

a. Étudier l'éventuelle convergence de la suite (u_n).

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. Montrer que $\lim(v_{n+1} - v_n) = 1$.

c. En déduire à l'aide du lemme de l'escalier un équivalent de u_n.

Exercice 7 (⋆)

Donner la limite puis un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Indication : trouver une valeur de α permettant d'appliquer le lemme de l'escalier à la suite $v_n = u_n^\alpha$.

Exercice 8 (⋆⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - k)$.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ il existe un unique réel x_n dans $]0,1[$ tel que $\mathrm{P}_n'(x_n) = 0$.

Indication : étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)}$.

b. Déterminer la limite puis un équivalent de la suite (x_n).

Exercice 9 (⋆⋆⋆)

Soit (x_n) une suite réelle, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$.

a. Montrer que si (y_n) converge vers 0, il en est de même de la suite (x_n).

b. En déduire que si (y_n) converge il en est de même de la suite (x_n).

Exercice 10 (⋆⋆)

Soit (z_n) une suite complexe vérifiant la relation $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Séries à terme général positif

Exercice 11 (⋆)

Étudier la convergence des séries de terme général (α désigne un paramètre réel quelconque) :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \qquad 1-\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \qquad \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \qquad \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan(n-2)\right)$$

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e} \qquad u_n=(\operatorname{ch} n)^\alpha-(\operatorname{sh} n)^\alpha \qquad u_n=\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) \qquad \mathrm{e}^{-(\ln n)^\alpha}$$

Exercice 12 (⋆)

Pour quelles valeurs de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ la série de terme général $u_n=\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer dans ce cas la somme de cette série.

Exercice 13 (⋆)

Étudier à l'aide du critère de d'Alembert la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{n^{\ln n}}{n!}$.

Exercice 14 (⋆)

Discuter en fonction de $\alpha>0$ la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$.

Exercice 15 (⋆)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$. Donner un équivalent simple de $u_{n+1}-u_n$, et en déduire l'existence d'une constante γ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$.

Exercice 16 (⋆)

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif, et $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 17 (⋆)

Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 18 (⋆⋆)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs ; on suppose qu'il existe $\alpha>1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Utiliser une comparaison logarithmique avec une série de Riemann pour prouver la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 19 (⋆)

Une *série de Bertrand* est de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Lorsque $\alpha > 1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée converge.

b. Lorsque $\alpha < 1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée diverge.

c. Lorsque $\alpha = 1$, montrer en utilisant la technique de comparaison à une intégrale que la série de Bertrand converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 20 (⋆⋆⋆)

Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Comparaison à une intégrale

Exercice 21 (⋆)

En exploitant une comparaison série/intégrale, déterminer la limite : $\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 22 (⋆)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Exercice 23 (⋆)

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale calculer $\lim_{x \to 1^+} (x-1)\zeta(x)$.

Séries alternées

Exercice 24 (⋆)

Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature bien que u_n soit équivalent à v_n.

Exercice 25 (⋆)

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n}} \qquad u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ avec } \alpha > 0 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos(n)} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n - (\ln n)^\alpha}$$

Exercice 26 (⋆⋆)

Déterminer la nature des séries $\sum \frac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n}$ et $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 27 (⋆⋆)

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : regrouper les termes deux par deux.

Transformation d'Abel

Exercice 28 (⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum \frac{H_n}{n(n+1)}$ converge, et en calculer la somme.

Exercice 29 (⋆⋆)

Soit une suite (u_n) telle que la série $\sum nu_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Indication. Poser $S_n = \sum_{k=0}^{n} ku_k$ *et exprimer* u_n *à l'aide des termes de la suite* (S_n).

Exercice 30 (⋆⋆)

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante, telle que $\sum u_n$ converge.

a. Montrer que $nu_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, et en déduire que $\lim nu_{2n} = 0$, puis que $\lim nu_n = 0$.

b. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

c. *Application*. Calculer pour $0 \leqslant r < 1$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n$.

Produit de Cauchy

Exercice 31 (⋆⋆)

Soit $a \in [0,1[$. Écrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries, et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} na^n$. Calculer par la même méthode $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n$.

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1 (∗)

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = nx^n \ln x$ pour $x \in]0,1]$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.
On considère un réel $\alpha \in]0,1[$. La convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0,\alpha]$? sur $[\alpha,1]$?

Exercice 2 (∗)

Soit $\alpha \geqslant 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$.
À quelle condition portant sur α la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 3 (∗)

Étudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$ de la suite de fonctions (f_n), avec :

a. $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+n}$; b. $f_n : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x/n}$; c. $f_n : x \mapsto n^2 x\mathrm{e}^{-nx}$; d. $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$.

Le cas échéant, on précisera des intervalles $J \subset I$ sur lesquels la convergence est uniforme.

Exercice 4 (∗)

Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,+\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

Pour les 5/2 : calculer ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (∗)

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f_n(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{nx}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$. Calculer $f_n(n)$; la convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$? et sur $[0,a]$ (avec $a > 0$) ?

Exercice 6 (∗∗)

Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $h(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} h(x) = 0$. On définit les suites de fonctions (f_n) et (g_n) en posant : $f_n(x) = h(nx)$ et $g_n(x) = h(x/n)$.

a. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ des suites de fonctions (f_n) et (g_n).

b. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

c. Sur quels intervalles y-a-t'il convergence uniforme ?

Exercice 7 (∗∗)

Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = g(x)\mathrm{e}^{-nx}$.

a. Étudier la convergence simple de (f_n), puis montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

b. Fixons $\epsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ de sorte que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $|f_n(x)| \leqslant \epsilon$, et en déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8 (⋆⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f'' soit bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{n}{2}\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right)$.

a. Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une fonction à préciser.

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Séries de fonctions

Exercice 9 (⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$ on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)^2}$ et $v_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum u_n$ puis de $\sum v_n$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 10 (⋆⋆)

Soit (a_n) une suite décroissante à valeurs positives, et $f_n : x \mapsto a_n x^n(1-x)$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b. Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est normale sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

c. Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.

Exercice 11 (⋆)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Utiliser un encadrement donné par la technique de comparaison à une intégrale pour déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 12 (⋆⋆)

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

a. Justifier que f est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b. Démontrer que pour tout $x > 0$, $2f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+nx)\big(1+(n+1)x\big)}$.

c. Utiliser le critère spécial des séries alternées pour en déduire un encadrement de $f(x)$, puis sa limite en 0.

Exercice 13 (⋆)

Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$

Exprimer la dérivée sans symbole de sommation, et en déduire une expression simple de $f(x)$.

Exercice 14 (⋆⋆)

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 15 (⋆⋆)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, puis donner des équivalents simples de f en $+\infty$ et en 0.

Exercice 16 (⋆⋆)

Soit a un réel fixé dans $]-1,1[$. On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}$.

a. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire une expression simple de $f'(x)$ puis de $f(x)$. On admettra que $f(0) = -\ln(1-a)$.

c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos(x) + 1)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 17 (⋆⋆)

On pose sous réserve de convergence : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f et de continuité de f.

b. Déterminer la limite en 0 de $xf(x)$.

Exercice 18 (⋆⋆)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

b. Montrer que la quantité $xf(x) - f(x+1)$ est constante sur $]0,+\infty[$.

c. Donner des équivalents en 0 et $+\infty$ de $f(x)$.

d. Tracer la courbe représentative de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 19 (⋆⋆)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

a. Établir l'existence et la continuité de f sur $]0,+\infty[$.

b. Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

c. Tracer la courbe représentative de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 20 (⋆⋆)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\Big)$.

a. Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b. Chercher une relation simple liant $f(x)$ et $f(x+1)$.

c. Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Séries entières

Rayon de convergence

Exercice 1 (∗)

Soit $a > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum n^{(-1)^n} z^n \qquad \sum \mathrm{e}^{\sqrt{n}} z^n \qquad \sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n \qquad \sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^{2n}$$

$$\sum \frac{n^n}{n!} z^{2n} \qquad \sum a^n z^{n!} \qquad \sum \frac{1 \times 4 \times 7 \times \cdots \times (3n-2)}{n!} z^{2n} \qquad \sum \binom{2n}{n} z^n$$

Exercice 2 (∗)

Pour $n \geqslant 1$ on note a_n le nombre de diviseurs de n. déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 3 (∗)

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, et $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$?

Exercice 4 (∗)

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergences respectifs R_p et R_i.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 5 (∗)

Soit (a_n) une suite ne s'annulant pas. On note R_1 le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_2 celui de $\sum \frac{1}{a_n} z^n$.
Montrer que $\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2 \leqslant 1$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Exercice 6 (∗)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie : $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_a \mathrm{R}_b$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Exercice 7 (∗∗)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Exercice 8 (∗∗)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

a. Soit $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$.

b. Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{P}(n) a_n z^n$.

Calcul de sommes

Exercice 9 (∗)

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ sur l'intervalle ouvert de convergence, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

Exercice 10 (∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum s_n x^n$, puis en calculer la somme.

Exercice 11 (∗∗)

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

Exercice 12 (∗∗)

Calculer la somme sur l'intervalle ouvert de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$.

Exercice 13 (∗∗)

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 14 (∗∗)

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

a. Quel est son rayon de convergence ? On note $\mathrm{Li}_2(x)$ sa somme (cette fonction s'appelle le dilogarithme). Reconnaître sa dérivée.

b. Pour $x \in]0,1[$, exprimer $\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

c. En déduire l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

Développement en série entière

Exercice 15 (∗)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, les fonctions :

$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \sin x$ (utiliser la formule d'Euler)

$f_2 : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$ (factoriser le polynôme)

$f_3 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{1 - 2x \operatorname{ch} a + x^2}\right)$ (factoriser le polynôme)

$f_4 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (dériver la fonction)

$f_5 : x \mapsto (\arctan x)^2$ (utiliser un produit de Cauchy)

$f_6 : x \mapsto \sin(\alpha \arcsin x)$ (déterminer une équation différentielle vérifiée par f_6)

Exercice 16 (∗∗)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, la fonction $x \mapsto \arctan(x+1)$.

Exercice 17 (⋆)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière au voisinage de 0, puis calculer les coefficients de ce développement.

Exercice 18 (⋆)

Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ et en déduire le développement de $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1-x}$.

Exercice 19 (⋆)

Développer en série entière $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ en exploitant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 20 (⋆⋆)

Soit $r > 0$ et f et g deux fonctions développables en série entière sur l'intervalle $]-r,r[$. On suppose que pour tout $x \in]-r,r[$, $f(x)g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 21 (⋆)

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$, dont on cherche l'unique solution vérifiant les conditions de Cauchy : $y(0) = y'(0) = 0$.
Si cette solution est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme : $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
Calculer explicitement a_n en fonction de n. Quel est le rayon de convergence de la série entière correspondante, et quel en est la somme ?

Exercice 22 (⋆⋆)

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. On suppose pour l'instant que le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum a_n x^n$ est strictement positif et on note $f(x)$ sa somme sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$.

b. En déduire que pour tout $x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

c. En déduire la valeur de R, puis développer en série entière l'expression précédente pour en déduire l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 23 (⋆⋆)

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle *dérangement* de E une permutation sans point fixe, et on note d_n le nombre de ces dérangements, avec la convention $d_0 = 1$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$.

b. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence est au moins égal à 1, calculer $\mathrm{e}^x f(x)$ et en déduire $f(x)$.

c. Prouver alors que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Étude au bord de l'intervalle de convergence

Exercice 24 (⋆⋆)

Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs telle que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ soit égal à 1 et la série $\sum a_n$ divergente. Pour tout $x \in]-1,1[$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Exercice 25 (⋆⋆)

En utilisant le développement en série entière de la fonction arctan, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 26 (⋆⋆⋆)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge, et on pose pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

b. En déduire que $\lim_{x\to 1} f(x) = S$.

Espaces vectoriels normés

Normes

Exercice 1 (∗)

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\| = \sup\left\{\left|P'(t) - P(t)\right| \;\middle|\; t \in [0,1]\right\}$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}[X]$. S'agit-il d'une norme sur l'espace $\mathscr{C}^1([0,1] \to \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$?

Exercice 2 (∗)

Montrer que $N : (x,y) \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner la sphère unité.

Exercice 3 (∗)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$ on note $\overline{B}(a,r)$ la boule fermée de centre a de rayon r. Prouver les implications suivantes :

a. $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,s) \Longrightarrow \|a-b\| \leqslant s-r$;

b. $\mathring{B}(a,r) \cap \mathring{B}(b,s) = \varnothing \Longrightarrow \|a-b\| > r+s$.

Exercice 4 (∗∗)

Soit E un espace vectoriel réel, et $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
- pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0_E$.

Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble $B = \left\{x \in E \;\middle|\; N(x) \leqslant 1\right\}$ est convexe.

Exercice 5 (∗∗)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$ on note $\mathring{B}(a,r)$ la boule ouverte de centre a de rayon r. Prouver l'implication suivante : $\mathring{B}(a,r) = \mathring{B}(b,s) \Longrightarrow a = b$ et $r = s$.

Exercice 6 (∗)

On définit pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ les quantités $N_1(P) = \sup\left\{\left|P(t)\right|,\ t \in [-1,1]\right\}$ et $N_2(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$.

a. Justifier que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \dfrac{X^n}{n}$. Étudier la convergence de la suite (P_n) pour les normes N_1 et N_2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7 (∗)

On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour tout $(u_n) \in E$ on pose $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(|u_n| + |u_{2n}|\right)$.

Montrer que N est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Topologie d'un espace vectoriel normé

Exercice 8 (∗)

Soient A et B deux parties d'un même espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que

$$\mathring{A}\cup\mathring{B}\subset\overset{\circ}{A\cup B},\qquad \mathring{A}\cap\mathring{B}=\overset{\circ}{A\cap B},\qquad \overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B},\qquad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

Exercice 9 (∗)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Fr}(E\setminus A)$.

Exercice 10 (∗)

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont E et $\varnothing$.

Exercice 11 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

a. Montrer que le seul sous-espace vectoriel ouvert de E est E lui-même.

b. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{O})=E$.

Exercice 12 (∗)

Justifier que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (∗∗)

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

a. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

b. Montrer que $\mathring{A}$ est convexe.

Limite et continuité

Exercice 14 (∗)

Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite de matrices $U_n=I+A+A^2+\cdots+A^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $I-A$ est inversible et que $B=(I-A)^{-1}$.

Exercice 15 (∗∗)

Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 16 (∗)

On considère deux réels $(p,q)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=px+q$ et les deux demi-plans

$$\mathcal{P}_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;y<px+q\right\}\quad\text{et}\quad\mathcal{P}_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;y>px+q\right\}$$

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ une fonction continue telle que $f(a)\in\mathcal{P}_1$ et $f(b)\in\mathcal{P}_2$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)\in\mathcal{D}$.

Exercice 17 (∗∗)

Soit C une partir convexe d'un espace vectoriel normé E, et $f:C\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soient a et b deux points de C, et y un réel vérifiant : $f(a)<y<f(b)$. Montrer qu'il existe $x\in C$ tel que $f(x)=y$.

Exercice 18 (⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon r.

a. Montrer qu'il existe deux points A et B diamétralement opposés de $\mathcal{C}$ tels que $f(A) = f(B)$.

b. Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour, tels que $f(C) = f(D)$.

Exercice 19 (⋆⋆)

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il toujours une application continue $\phi : [0,1] \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi(0) = A$ et $\phi(1) = B$?

Exercice 20 (⋆⋆)

Soit A une partie non vide de E, et $x \in E$. On pose $d(x,A) = \inf\left\{\|x-a\| \;\middle|\; a \in A\right\}$.

a. Justifier que si A est fermé et borné, il existe pour tout $x \in E$ un point $a_0 \in A$ tel que $\|x - a_0\| = d(x,A)$, puis montrer que cette propriété reste vraie lorsqu'on suppose uniquement A fermé.

b. Soient A et B deux parties fermées d'un même espace vectoriel normé E tels que $A \cap B = \varnothing$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

Exercice 21 (⋆)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et A une partie fermée et bornée de E. Montrer l'existence de $(a,b) \in A^2$ tels que pour tout $(x,y) \in A^2$, $\|x-y\| \leqslant \|a-b\|$.

Dérivabilité

Exercice 22 (⋆)

Soit E un espace euclidien et $f : I \to \mathbb{E}$ une fonction deux fois dérivable, telle que la fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ soit constante. Montrer que pour tout $t \in I$, $\langle f(t) \mid f''(t)\rangle \leqslant 0$.

Exercice 23 (⋆)

On considère une fonction vectorielle $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que pour tout $t \in I$, la matrice $A(t)$ soit inversible. On peut donc définir la fonction $f : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant : $\forall t \in I,\ f(t) = A(t)^{-1}$.
On admet que f est de classe $\mathscr{C}^1$; calculer $f'(t)$ pour $t \in I$.

Exercice 24 (⋆)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\det\Big(f(a), f(b), f'(c)\Big) = 0$.

Exercice 25 (⋆)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Justifier que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Intégration

Intégration des fonctions continues par morceaux

Exercice 1 (∗)

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Établir que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$.

Exercice 3 (∗)

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

Exercice 4 (∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)$.

Exercice 5 (∗∗)

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|x - \mathrm{e}^{it}|\,\mathrm{d}t$ en utilisant une somme de Riemann.

Dérivation et intégration

Exercice 6 (∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $g'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $y'' + y = f(x)$.

Exercice 7 (∗)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant : $\forall t \in [a,b]$, $f(a+b-t) = f(t)$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 (∗)

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, et en déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 9 (∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), et calculer u_0 et u_1.

b. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 10 (⋆⋆)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Soit $g : x \mapsto x \displaystyle\int_a^x (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t + (1-x)\int_x^b tf(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et que $g'' = f$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que h_n est de classe $\mathscr{C}^n$ et que $h_n^{(n)} = f$.

Exercice 11 (⋆⋆)

Pour $0 < a < b$ déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1-\cos(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12 (⋆⋆)

Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$. Trouver la limite de f lorsque x tend vers 0.

Exercice 13 (⋆⋆)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$, et $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$. Déterminer la limite de la suite (s_n).

Exercice 14 (⋆)

Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 15 (⋆⋆⋆)

a. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]a,b[$.

c. Soit $n \geqslant 2$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]a,b[$.

Exercice 16 (⋆⋆⋆)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue à valeurs strictement positives, et $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer l'existence d'une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{I}}{n}$.

b. Quelle est la limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$?

Exercice 17 (⋆⋆⋆)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $\mathrm{M}_2 = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} \|f''(t)\|$.

Montrer que : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_2 \frac{(b-a)^3}{12}$. On pourra procéder à deux intégrations par parties successives.

Exercice 18 (⋆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$, établir que pour tout $h > 0$,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

puis en déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.
En utilisant cette fois les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ ainsi qu'entre x et $x-h$, établir que

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

et en déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$.

Intégrales généralisées

Exercice 19 (⋆)

Déterminer sans recourir à la recherche de primitives la convergence ou non des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 20 (⋆)

Justifier l'existence puis calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 21 (⋆)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que les intégrales suivantes soient convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22 (⋆)

Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ln(t+\mathrm{e}^{-\beta t})\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23 (⋆⋆)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, telle que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)^2\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.
Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu'il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$.
En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 24 (⋆)

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge puis calculer sa valeur en utilisant le changement de variable $u = 1/t$.

b. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25 (⋆)

Justifier l'existence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$, puis montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.

Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, et en déduire la valeur de I.

Exercice 26 (⋆⋆)

Soient α et β deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Soit $x > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 27 (⋆⋆)

a. Justifier l'existence de : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b. Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

À l'aide de la formule : $\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$, montrer que $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 28 (⋆⋆)

Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone et intégrable sur $[0,1[$, et $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 29 (⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\Big(f(t) - f(t+1)\Big)\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 30 (⋆⋆)

À l'aide d'une intégration par parties, prouver que l'intégrale de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 31 (⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

b. On suppose de plus f' intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que la série $\displaystyle\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

c. Soit $\alpha > 1/2$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 32 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.
On pose $\lambda = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \lambda x$.

a. Montrer que la fonction F est T-périodique.

b. Soit $\alpha > 0$. Démontrer la convergence puis l'égalité des intégrales $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)-\lambda}{t^\alpha}\,dt$ et $J = \alpha\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$.

Exercice 33 (*)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable. Montrer que pour tout $h > 0$ la série $\sum hf(nh)$ converge, puis calculer la limite $\lim\limits_{h\to 0^+} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} hf(nh)$.

Le théorème de convergence dominée

Exercice 34 (*)

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n + e^t}$.

Exercice 35 (*)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\,dt$.

Exercice 36 (*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 nt^n f(t)\,dt = f(1)$.

Exercice 37 (*)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée, telle que $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Exercice 38 (*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,dt$.

b. On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que $I_n = f(0) + \displaystyle\int_0^1 \left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right) f'(u)\,du$.

c. En déduire que $I_n = f(0) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(u) f'(u)\,du + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 39 (**)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} nf(t)e^{-nt}\,dt \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^n nf(t)e^{-nt}\,dt.$$

Pour la seconde intégrale, vous pourrez considérer la suite de fonctions (f_n) définie par : $f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

Exercice 40 (⋆)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f et f' soient bornées. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} n f(t) \mathrm{e}^{-nt} \, \mathrm{d}t$ existe, et calculer $\ell = \lim\limits_{+\infty} \mathrm{I}_n$.
On suppose $f'(0) \neq 0$. Donner un équivalent de $(\mathrm{I}_n - \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 41 (⋆)

Calculez la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t} \, \mathrm{d}t$. Pour cela, on considérera la fonction $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Exercice 42 (⋆)

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} \, \mathrm{d}t$ en utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$.

Exercice 43 (⋆)

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t+1} \, \mathrm{d}t$ (utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$).

Exercice 44 (⋆⋆)

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 45 (⋆⋆)

On pose pour $n \geqslant 1$: $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. Justifier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 46 (⋆⋆)

Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs, divergeant vers $+\infty$. On considère la fonction suivante :

$$\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}.$$

a. Quel est l'ensemble de définition de S ? Y-est-elle continue ?

b. On suppose la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_n}$ convergente. Montrer que S est intégrable sur $]0,+\infty[$, et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t) \, \mathrm{d}t$.

c. On ne suppose plus la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_n}$ convergente. Montrer que le résultat précédent subsiste.

Exercice 47 (⋆⋆)

a. Justifier l'existence de l'intégrale $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1} \, \mathrm{d}t$, puis montrer que $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \, \mathrm{e}^{-nt} \, \mathrm{d}t$.

b. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t \, \mathrm{e}^{-nt} \, \mathrm{d}t$, et en déduire que $\mathrm{K} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 48 (⋆⋆⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Justifier l'existence puis calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Indication : écrire $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, *puis établir successivement que* $u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ *et enfin que* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$.

Intégrales à paramètre

Exercice 49 (⋆⋆)

Soit $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{x h(t)\,\mathrm{d}t}{x^2+t^2} = \frac{\pi}{2} h(0)$.

Exercice 50 (⋆)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \arctan t\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ puis en donner un équivalent en 0 et en $+\infty$.

Exercice 51 (⋆)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f'(x)$, et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 52 (⋆)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. En déduire une expression de g sans symbole intégral (on admettra que $g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 53 (⋆)

On considère la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'elle est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par g sur $]0,+\infty[$.

Exercice 54 (⋆⋆)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. f est-elle continue sur cet intervalle ? Dérivable ?

b. On pose $h(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Exprimer f à l'aide de h et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 55 (⋆⋆)

On pose quand c'est possible $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f. Est-elle continue sur $\mathcal{D}$? De classe $\mathscr{C}^1$?

b. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

c. Donner un équivalent de f en $(-1)^+$.

Exercice 56 (⋆⋆)

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t$. Quel est son ensemble de définition ? g y-est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$? Exprimer g sans symbole intégral.

Exercice 57 (⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

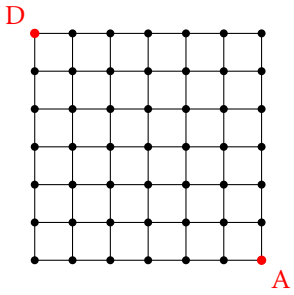
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$, et en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Probabilités

Dénombrement

Exercice 1 (⋆)

On considère une grille carrée de taille $n \times n$, sur laquelle on ne peut se déplacer que d'une unité à la fois, et ce uniquement de la gauche vers la droite ou de haut en bas. Combien y-a-t-il de chemins reliant le point D au point A ?



Exercice 2 (⋆)

Soit E un ensemble de cardinal n.

a. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.

b. En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \varnothing$.

c. En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E deux-à-deux disjointes telles que $A \cup B \cup C = E$.

d. Généraliser la formule précédente à un nombre p de parties de E.

Exercice 3 (⋆)

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

a. Calculer S_n^1, S_n^2, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.

b. Pour $n \geqslant 3$ on suppose $p \leqslant n$ et on considère un élément a de E.

En observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, établir la relation :

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p\right).$$

c. En déduire que $S_n^p = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$.

Exercice 4 (⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.
Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, et en déduire l'expression de u_n.

Exercice 5 (⋆⋆)

Soit E un ensemble à np éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.

Exercice 6 (⋆⋆⋆)

Montrer que le nombre de façons de placer p boules indiscernables dans q urnes discernables est égal à $\binom{p+q-1}{q-1}$.

Exercice 7 (**)

a. Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leqslant n$?

b. Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_p \leqslant n$?

Indication : utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Espaces probabilisés

Exercice 8 (*)

Soit $\mathscr{A}$ une tribu de $[0,1]$ contenant tous les segments $[a,b]$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

a. Montrer que $\mathscr{A}$ contient tous les intervalles ouverts $]a,b[$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, ainsi que tous les singletons $\{\alpha\}$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

b. On suppose que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $([0,1], \mathscr{A})$ vérifiant : $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$ pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Calculer $\mathbb{P}(]a,b[)$ et $\mathbb{P}(\{\alpha\})$.

Exercice 9 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisé, et (A_n) une suite d'événements. Traduire en notations ensemblistes les événements suivants :

a. l'un au moins des événements A_n est réalisé ;

b. tous les événements A_n sont réalisés ;

c. il existe un rang à partir duquel tous les événements A_n sont réalisés ;

d. une infinité d'événements parmi les A_n sont réalisés ;

e. seul un nombre fini d'événements A_n sont réalisés ;

f. une infinité d'événements parmi les A_n ne sont pas réalisés.

Exercice 10 (**)

Soit (A_n) une suite d'événements d'un même espace probabilisé.

a. Montrer que les ensembles suivants sont des événements :

- A = « à partir d'un certain rang tous les A_n sont réalisés » ;
- B = « il y a une infinité d'événements parmi les A_n qui sont réalisés » ;
- C = « il n'y a jamais deux événements consécutifs réalisés ».

b. On suppose les événements A_n mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et montrer sans la calculer que $0 < \mathbb{P}(C) < 1$.

Exercice 11 (**)

Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

b. On suppose la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ divergente. Que dire de l'événement $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n$?

c. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue une succession infinie de tirages. Après chaque tirage on remet la boule tirée et on en ajoute une rouge. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins une fois la boule noire ?

d. Quelle est la probabilité que la boule noire soit tirée une infinité de fois ?

Conditionnement et indépendance

Exercice 12 (⋆)

On considère $p+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_p$ en supposant que pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $p-k$ boules noires. L'expérience consiste à choisir aléatoirement une urne puis à effectuer un certain nombre de tirages avec remise dans cette urne.

a. Déterminer la probabilité de l'événement A_n défini par : « les n premiers tirages ont donné des boules blanches ».

b. Exprimer $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)$.

Exercice 13 (⋆)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire dans cette urne une boule, puis on la remet accompagnées de deux autres boules de la même couleur. On répète ensuite cette opération indéfiniment.

a. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient blanches ?

b. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules blanches ?

Exercice 14 (⋆)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A,B) \in \mathscr{A}^2$.

a. Si $\mathbb{P}(A) > 0$, montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A \cap B \mid A)$.

b. Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, montrer que $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \mid B) \Longrightarrow \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B \mid A)$.

Exercice 15 (⋆⋆)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et $(A,B) \in \mathscr{A}^2$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Exercice 16 (⋆)

On considère deux urnes U_1, contenant n_1 boules noires et b_1 boules blanches, et U_2, contenant n_2 boules noires et b_2 boules blanches. On choisit de façon équiprobable l'une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs avec remise. Soit N_1 l'événement « tirer une boule noire au premier tirage » et N_2 l'événement « tirer une boule noire au second tirage ».

a. Quelle est la probabilité de N_1 ? de N_2 ? de $N_1 \cap N_2$?

b. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 17 (⋆)

Un sac contient 100 dés dont 25 sont pipés. Un dé pipé a une chance sur deux de donner le chiffre 6.

a. On prend un dé au hasard et on le lance. On obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b. On prend un dé au hasard et on le lance n fois. On obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 18 (⋆)

Une puce se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse $a \in [\![0,N]\!]$. À chaque instant elle fait un bond de +1 avec la probabilité $p \in]0,1/2[$ ou un bond de −1 avec la probabilité $q = 1-p$. Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités de l'intervalle 0 ou N. On note u_a la probabilité pour que la puce, partant de a, s'arrête en 0.

a. Que vaut u_0 ? u_N ?

b. Lorsque $0 < a < N$, exprimer u_a en fonction de u_{a-1} et u_{a+1} et en déduire l'expression générale de u_a.

c. Calculer la probabilité v_a pour que la puce, partant de a, s'arrête en N.

d. Calculer $u_a + v_a$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 19 (⋆⋆)

Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour quelle valeur de λ $\mathbb{P}$ détermine-t-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$? On suppose désormais cette valeur choisie.

b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on considère l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.

c. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est indépendante.

d. En calculant de deux manière $\mathbb{P}(\{1\})$ en déduire que $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$, où $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

Exercice 20 (⋆⋆)

On considère une marche aléatoire uni-dimensionnelle sur un axe indexé par $\mathbb{Z}$. À l'instant initial une particule se trouve en position 0 ; chaque seconde voit celle-ci se déplacer vers la droite avec une probabilité $p \in]0,1[$ et vers la gauche avec une probabilité $q = 1-p$.
On note $X_n \in \mathbb{Z}$ la position de la particule à la date n et $T \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ la date du premier retour à l'origine.
On pose enfin $a_n = \mathbb{P}(X_{2n} = 0)$ et $b_n = \mathbb{P}(T = 2n)$ et on considère les séries entières $A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $B(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

a. Justifier que les rayons de convergence de ces séries entières vérifient $1 \leqslant R_a \leqslant R_b$.

b. Exprimer a_n en fonction de n et en déduire la valeur de R_a.

c. Montrer que pour tout $x \in]-R_a, R_a[$, $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx}}$.

d. Justifier que $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k}$ et en déduire une relation liant $A(x)$ et $B(x)$, puis l'expression de $B(x)$ sur $]-R_a, R_a[$.

e. Lorsque $p \neq 1/2$, déterminer la probabilité qu'il n'y ait jamais de retour à l'origine.

Variables aléatoires

Exercice 21 (⋆)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 22 (⋆)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 23 (⋆)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2.
Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ? Que la matrice $B = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ soit nilpotente ?

Exercice 24 (⋆)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose X et Y *symétriques*, autrement dit que $X \sim -X$ et $Y \sim -Y$.

a. Montrer que $(X,Y) \sim (X,-Y)$, puis que $\mathbb{P}(X^2 = Y^2) = 2\mathbb{P}(X = Y) - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$.

b. Montrer que $\mathbb{P}(X+Y \geqslant 0) = \mathbb{P}(X+Y \leqslant 0)$.

Exercice 25 (⋆⋆)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé. On suppose que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leqslant x \text{ et } Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y)$.
Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y \leqslant y)$ puis que X et Y sont indépendantes.

Exercice 26 (⋆)

On appelle *variable aléatoire de Rademacher* une variable aléatoire réelle X telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$.
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la loi de S_n.

Exercice 27 (⋆)

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, et N une variable aléatoire indépendante des X_i et suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Exercice 28 (⋆⋆)

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. On suppose que les variables X et $f(X)$ sont indépendantes. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(f(X) = n) = 1$.

Exercice 29 (⋆⋆⋆)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction de répartition* de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$.
Montrer que la fonction F_X possède les propriétés suivantes :

- F_X est une fonction croissante ;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, F_X est continue à droite et possède une limite à gauche en a ;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F_X(a^+) - F_X(a^-) = \mathbb{P}(X = a)$.

Espérance et variance

Exercice 30 (⋆⋆)

On considère un jeu de Pile ou Face infini avec une pièce possédant la probabilité $p = \frac{2}{3}$ de tomber sur Face, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face consécutifs pour la première fois.
Pour $n \geqslant 1$ on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

a. Calculer p_1 et p_2.

b. Pour $n \geqslant 3$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1} et p_{n-2}, et en déduire l'expression de p_n.

c. Calculer enfin $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 31 (⋆)

Un joueur joue à une succession infinie de jeux indépendants, qu'il gagne avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note L_1 la longueur de la première liste de parties toutes gagnées ou toutes perdues et L_2 la longueur de la deuxième liste.
Par exemple, pour la séquence suivante : GGGPPG⋯ on a $L_1 = 3$ et $L_2 = 2$.

a. Déterminer la loi de L_1 et son espérance.

b. Déterminer la loi de L_2 et son espérance.

c. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 32 (⋆)

On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

a. Que vaut $\mathbb{P}(X \geqslant k)$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

b. Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X)}{N}$.

Exercice 33 (⋆)

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ on note T_m la variable aléatoire du m^e succès, autrement dit $T_m = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; X_1 + \cdots + X_k = m\right\}$. Déterminer la loi et l'espérance de T_m.

Exercice 34 (⋆)

a. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

b. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Exercice 35 (⋆⋆)

On dispose de k dés équilibrés. On les lance et on ne garde que ceux qui n'ont pas amené un 6. On recommence avec les dés restants jusqu'à ce qu'ils soient tous retirés.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qui seront effectués. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant n)$, et en déduire $\mathbb{P}(X = n)$.

b. Déterminer l'espérance de X lorsque $k = 2$.

Exercice 36 (⋆⋆)

Soient $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes, et M la matrice $(X_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Déterminer l'espérance et la variance de tr(M).

b. Déterminer l'espérance et la variance de det(M).

Exercice 37 (⋆)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, indépendantes et de même loi.
On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1+X_2}$.

a. Montrer que Y_1 admet une espérance, puis la calculer.

b. Montrer que Y_1 admet une variance, puis exprimer la covariance de Y_1 et Y_2 en fonction de celle-ci.

Exercice 38 (⋆)

Soit X une variable aléatoire presque sûrement bornée, et X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On suppose que X_1X_2 suit la même loi que X^2. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 39 (⋆⋆)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ possédant un moment d'ordre 2 et d'espérance strictement positive. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

Exercice 40 (⋆)

Soit X une variable aléatoire possédant un moment d'ordre 2, et $(X_1,\dots,X_n)$ une suite finie de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $S = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$. Calculer l'espérance de S.

Exercice 41 (⋆⋆⋆)

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $Y_n = \min(X_1,\dots,X_n)$, $Z_n = \max(X_1,\dots,X_n)$, $\alpha_n = \mathbb{E}(Y_n)$ et $\beta_n = \mathbb{E}(Z_n)$.

a. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.

b. Exprimer α_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent de β_n.

Exercice 42 (⋆⋆)

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$.
On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ et on considère $\epsilon > 0$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = (\operatorname{ch} t)^n$.

b. Montrer que pour tout $t > 0$, $\operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}$.

c. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\epsilon\right)$.

d. En déduire que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp(-n\epsilon^2/2)$.

Exercice 43 (⋆)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2, telle que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}\left((X - \lambda + 1)^2 \geqslant (\lambda+1)^2\right)$ et en déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$.

Exercice 44 (⋆⋆⋆)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et réelles admettant un moment d'ordre 2.

a. On suppose $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(Y^2) > 0$, et on pose $Z = \mathbb{1}_{Y>0}$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à Y et Z, Montrer que $\mathbb{P}(Y > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$.

b. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(X - \mathbb{E}(X) < \epsilon\right) \geqslant \dfrac{\epsilon^2}{\mathbb{V}(X) + \epsilon^2}$, puis l'inégalité de Cantelli :

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \epsilon^2}$$

Exercice 45 (⋆⋆)

Soient X et Y deux variables aléatoires linéaires possédant un moment d'ordre 2. On suppose $\mathbb{V}(X) > 0$. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ minimisant la quantité $\mathbb{E}\left((Y - aX - b)^2\right)$. La droite d'équation $y = ax + b$ est appelée la droite de régression linéaire de X et Y ; elle donne la « meilleure » expression linéaire de Y en fonction de X.

Exercice 46 (⋆⋆)

On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) *converge en probabilité* vers une variable aléatoire X lorsque pour tout $\epsilon > 0$, $\lim \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0$.

a. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, un réel m et une suite de variables aléatoires (X_n) possédant toutes un moment d'ordre 2 et telle que :

- la suite $(\mathbb{E}(X_n))$ converge vers m ;
- la suite $(\mathbb{V}(X_n))$ converge vers 0.

Montrer que (X_n) converge en probabilité vers $X = m$;

b. Soit S_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On pose $Y_n = \exp(S_n/n)$. Montrer que (Y_n) converge en probabilité vers $Y = \exp(p)$.

Séries génératrice

Exercice 47 (⋆)

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, et G_X sa série génératrice. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_X(e^{it})e^{-int}\,dt$$

Exercice 48 (⋆)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in]0,1[$ fixés. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k$$

a. Calculer la fonction génératrice G_X de X et en déduire la valeur de a.

b. Calculer l'espérance de X.

Exercice 49 (⋆⋆⋆)

On considère deux variables aléatoires entières N et X, ainsi qu'une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

a. Montrer que les séries génératrices de X, N et Y vérifient la relation : $G_Y = G_N \circ G_X$.

b. En déduire que si N et X admettent une espérance, il en est de même de Y, et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ (formule de Wald).

Espaces euclidiens

Produit scalaire

Exercice 1 (∗)

Soit E un espace euclidien, $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$, et $k \in \mathbb{R}$. On définit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \phi(x,y) = \langle x \mid y \rangle + k\langle x \mid a \rangle \langle y \mid a \rangle.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante ϕ est-il un produit scalaire ?

Exercice 2 (∗∗)

Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable.

On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $A_{ij} = \displaystyle\int_I f_i(t) f_j(t)\,dt$.

À quelle condition l'application $X, Y \mapsto X^T A Y$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3 (∗)

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Prouver que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Dans quel cas y-a-t'il égalité ?

Exercice 4 (∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,dt \leqslant 4 \int_0^1 t^2 f'(t)^2\,dt$.

Exercice 5 (∗∗)

Soit E un espace préhilbertien réel, et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs unitaires.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $\left\| \displaystyle\sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k \right\| \leqslant \sqrt{n}$.

a. On considère n variables aléatoires indépendantes $R_1, \dots, R_n$ de même loi de Rademacher (autrement dit, $\mathbb{P}(R_k = 1) = \mathbb{P}(R_k = -1) = 1/2$). Calculer l'espérance de $\left\| \displaystyle\sum_{k=1}^n R_k u_k \right\|^2$.

b. Conclure.

Projection orthogonale

Exercice 6 (∗)

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On considère un espace euclidien E de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. Déterminer la matrice associée dans la base (e) à la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

Exercice 7 (∗)

Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, et utiliser cette remarque pour calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^k - at - b)^2\,dt$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

Exercice 8 (∗)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle M \mid N \rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$, on pose $H = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{tr}(M) = 0 \right\}$, et on note J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

Exercice 9 (⋆⋆)

Soit p une projection vectorielle d'un espace euclidien E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x \in \mathrm{E}, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 10 (⋆⋆⋆)

On munit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ du produit scalaire $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, et on note $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$.

a. Calculer $\mathrm{P}_k(0)^2$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. On note $\mathrm{H} = \left\{ \mathrm{P} \in \mathrm{E} \;\middle|\; \mathrm{P}(0) = 0 \right\}$. Quelle est la dimension de H ? Déterminer une base de $\mathrm{H}^\perp$ à l'aide des $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n$.

c. Déterminer $\inf\left\{ \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2\,\mathrm{d}t \;\middle|\; (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$.

Espaces euclidiens

Exercice 11 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n. À $(x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{E}^p$ on associe le *déterminant de Gram* :

$$\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) = \det\Big(\langle x_i \mid x_j \rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}.$$

Montrer que $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) = \det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})$, où $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_p)$ et (e) une base orthonormée quelconque de E. En déduire que $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée.

Exercice 12 (⋆⋆)

Soient (e) et (f) deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que la quantité $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle f_i \mid u(e_j) \rangle^2$ ne dépend pas de (e) et (f).

Exercice 13 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n, et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs vérifiant :

(i) $\forall k \in [\![1, n]\!], \|u_k\| = 1$;

(ii) $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1$.

a. Montrer qu'on peut remplacer la condition (ii) par la condition :

(iii) $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \implies \langle u_i \mid u_j \rangle = 1/2$.

b. Montrer alors que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Exercice 14 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Prouver l'existence d'une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1$ (on pourra raisonner par récurrence).

Exercice 15 (⋆⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Une famille de p vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque $i \neq j \implies \langle x_i \mid x_j \rangle < 0$. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que $p \leqslant n + 1$.

Exercice 16 (⋆⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note Q_n le polynôme $\dfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

a. Exprimer le degré et le coefficient dominant de Q_n, et déterminer les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

b. On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis que pour tout $n \geqslant 1$, Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c. Calculer $\|Q_n\|$.

d. Exprimer à l'aide de la famille (Q_n) la famille obtenue lorsqu'on applique la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17 (⋆⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n, $(u_1,\dots,u_n)$ une base de E, et $(e_1,\dots,e_n)$ la base orthonormée obtenue par le procédé de Schmidt à partir de $(u_1,\dots,u_n)$. On note $R = \mathrm{Mat}_e(u_1,\dots,u_n)$ la matrice des composantes dans la base (e) de la famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_n)$.

a. Justifier l'affirmation : « R est une matrice triangulaire supérieure », et en déduire que $|\det R| \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|u_i\|$.

On considère maintenant une matrice inversible $A = (a_{ij}) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

b. Démontrer l'existence d'une matrice orthogonale Q et d'une matrice triangulaire supérieure R vérifiant : $A = QR$.

c. En déduire que si les coefficients de A vérifient : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{ij}| \leqslant 1$, alors $|\det A| \leqslant n^{n/2}$. Peut-on avoir égalité ?

Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice 18 (⋆)

Soit E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$. On considère $u : \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \lambda\langle x \mid a\rangle a \end{array}\right)$.

À quelle condition a-t-on $u \in \mathcal{O}(E)$? Dans ce cas, décrire u.

Exercice 19 (⋆)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle M \mid N\rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$.
Soit $A \in E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(M) = AM$. À quelle condition u est-il une isométrie vectorielle de E ?

Exercice 20 (⋆)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, (e) une base orthonormée d'un espace euclidien E, et $u \in \mathcal{O}(E)$ défini par : $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. Justifier que $a_{ij} = \langle e_i \mid u(e_j)\rangle$, et en déduire que : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Exercice 21 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie vectorielle. On pose $v = u - \mathrm{Id}$.
Montrer que $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, v)^{\perp}$.

En déduire que la suite $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$ converge vers p, projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\, v$.

Exercice 22 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x \mid y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x) \mid u(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle $v \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = \lambda v$.

Exercice 23 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien. On considère des vecteurs $u_1,\dots,u_n$ et $v_1,\dots,v_n$ de E tels que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\langle u_i \mid u_j\rangle = \langle v_i \mid v_j\rangle$, et le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une isométrie vectorielle $f\in\mathcal{O}(\mathrm{E})$ telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f(u_i)=v_i$.

a. Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une base de E.

b. Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une famille génératrice de E.

c. Traiter l'exercice dans le cas général.

Exercice 24 (⋆)

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Montrer l'existence de scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et de vecteurs unitaires $(u_1,\dots,u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{A}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$.

Exercice 25 (⋆)

Soit E un espace euclidien et $u\in\mathcal{S}_{\mathrm{E}}()$ un endomorphsime autoadjoint.

a. Montrer que l'application $x\mapsto\dfrac{\langle u(x)\mid x\rangle}{\|x\|^2}$ atteint sur $\mathrm{E}\setminus\{0\}$ un minimum et un maximum, qu'on exprimera à l'aide des valeurs propres de u. Pour quels vecteurs de E ces extremums sont-ils atteints ?

b. En déduire la valeur de $\max\left\{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n}x_k^2=1\right\}$.

Exercice 26 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien et u et v deux endomorphismes autoadjoints qui commutent : $u\circ v = v\circ u$.
Soit λ une valeur propre de u, et E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par v, et que la restriction de v à E_λ est un endomorphisme autoadjoint de E_λ.
En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ et $\mathrm{Mat}_e(v)$ soient diagonales.

Exercice 27 (⋆⋆)

Soit u un endomorphisme autoadjoint positif d'un espace euclidien. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2=u$.

Exercice 28 (⋆)

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det\mathrm{A})^{1/n}\leqslant\dfrac{\mathrm{tr}(\mathrm{A})}{n}$.

Exercice 29 (⋆⋆)

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle positive, et $\mathrm{U}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $|\mathrm{tr}(\mathrm{AU})|\leqslant\mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 30 (⋆⋆⋆)

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive.

a. Montrer que $\langle \mathrm{X}\mid\mathrm{Y}\rangle=\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b. En appliquant la méthode de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer l'existence d'une matrice triangulaire supérieure M telle que $\mathrm{A}=\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}$.

c. En déduire que $\det\mathrm{A}\leqslant\prod_{k=1}^{n}a_{kk}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 31 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint tel que $\operatorname{tr} u = 0$.

a. Montrer l'existence d'un vecteur non nul $x \in E$ tel que $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$.

b. En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle u(e_i) \mid e_i \rangle = 0$. Que dire de la matrice associée à u dans la base (e) ?

Exercice 32 (⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant : $A^T = -A$.

a. Déterminer le spectre de A. À quelle condition cette matrice est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et en déduire que $\operatorname{rg}(A)$ est un entier pair.

Calcul différentiel

Continuité

Exercice 1 (∗)

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x,y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=\frac{x+2y}{x^2-y^2} \qquad f(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{xy^2}.$$

Exercice 2 (∗)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1\\ -\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x^2+y^2\leqslant 1\end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Calcul différentiel

Exercice 3 (∗)

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f:x\mapsto\|x\|$. En quels points cette application est-elle différentiable ? Préciser le vecteur gradient en ces points.

Exercice 4 (∗)

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $f:\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{P})=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa différentielle.

Exercice 5 (∗)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées partielles, mais que f n'est pourtant pas continue en ce point.

Exercice 6 (∗)

Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\frac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (∗∗)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On définit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par :

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon}\end{cases}$$

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 8 (∗)

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Montrer que f vérifie la relation : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 9 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

a. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(x+t, y+t) = f(x,y)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

b. On suppose que pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = f(x,y)$. Montrer que $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 10 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application non nulle de classe $\mathscr{C}^1$.On dit que f est *homogène* s'il existe une application $\phi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$(*) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda > 0, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \phi(\lambda) f(x,y).$$

a. Montrer que si f est homogène, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha$.

Indication. Dériver l'égalité $(*)$ *par rapport aux variables* x, y *et* λ.

b. Montrer alors que f est homogène si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

c. Résoudre cette équation aux dérivées partielles à l'aide des coordonnées polaires.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 11 (∗)

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$.

Exercice 12 (∗)

En utilisant les coordonnées polaires résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x^2 + y^2 = f(x,y).$$

Exercice 13 (∗)

Résoudre sur $\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0\right\}$ l'équation $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y)$ à l'aide des coordonnées polaires.

Exercice 14 (∗∗)

Résoudre sur $\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > y\right\}$ l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-y)f(x,y)$ en posant $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$.

Exercice 15 (⋆)

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

Exercice 16 (⋆)

Étant donné $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on considère l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où la fonction f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

a. Transformer l'équation par le changement de variables $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$.

b. Lorsque $b^2 - 4ac > 0$ montrer qu'on peut intégrer l'équation.

Exercice 17 (⋆⋆)

Résoudre sur un ouvert adéquat l'équation $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$.

Exercice 18 (⋆⋆)

On appelle *laplacien* de f la quantité $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$. Calculer-le en coordonnées polaires. Quels sont les fonctions *harmoniques* (c'est-à-dire vérifiant $\Delta f = 0$) et *isotropes* (ne dépendant pas de l'angle θ) ?

Extremums d'une fonction

Exercice 19 (⋆)

Déterminer les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

$$(x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy \qquad (x,y) \mapsto (x-y)\mathrm{e}^{xy} \qquad (x,y) \mapsto x^4y^3 + \ln(1+y^4)$$

Exercice 20 (⋆⋆)

Étudier les extremums locaux éventuels de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy + yz + zx - xyz$.

Exercice 21 (⋆)

Déterminer la valeur maximale sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]^2$ de $f : (x,y) \longmapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$.

Exercice 22 (⋆)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$.

a. Montrer que f admet un point critique qui n'est pas un extremum local.

b. Soit $\mathcal{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$. Déterminer les extremums de f sur $\mathcal{K}$.

Exercice 23 (⋆⋆)

Soient x, y et z trois nombres réels positifs. On admet qu'il est possible de construire un triangle dont les côtés sont de longueurs respectives x, y et z si et seulement si :

$$x < y + z, \qquad y < z + x, \quad \text{et} \quad z < x + y.$$

Un triangle variable a un périmètre p imposé, ses côtés ont pour longueur x, y et z.
On pose $\mathrm{F}(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$. Déterminer le triangle pour lequel $\mathrm{F}(x,y,z)$ est minimal, et donner la valeur de ce minimum.

Exercice 24 (⋆⋆⋆)

Déterminer le périmètre maximal d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon 1.