Travaux dirigés

Espaces vectoriels normés

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel réel, et $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$;
- pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0_{\mathrm{E}}$.

Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble $\mathrm{B} = \left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, \mathrm{N}(x) \leqslant 1\right\}$ est convexe.

Exercice 2 Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes (u_n) telles que la série $\sum |u_n|$ converge, et (α_n) une suite de nombre complexes.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (α_n) pour que l'application $\mathrm{N} : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$ définisse une norme.

Exercice 3 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles (A_n) qui converge vers A.

Exercice 4 Soit (x_n) une suite réelle, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$.

a) Montrer que si (y_n) converge vers 0, il en est de même de la suite (x_n).

b) En déduire que si (y_n) converge il en est de même de la suite (x_n).

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}$ (avec n radicaux emboîtés). Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 6 Donner la limite puis un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 2$ n'admet qu'une solution sur $[0, +\infty[$; on note u_n celle-ci.

b) Montrer que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite. On admettra la formule : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.