Travaux dirigés
Endomorphismes d'un espace euclidien

Isométries vectorielles

Exercice 1 Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ conservant l'orthogonalité :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \qquad \langle x \mid y \rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x) \mid u(y) \rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle $v \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ tel que $u = \lambda v$.

Exercice 2 On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle \mathrm{M} \mid \mathrm{N} \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{N})$. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ défini par $u(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$. À quelle condition u est-il une isométrie vectorielle de E ?

Exercice 3 Soient (e) et (f) deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que la quantité $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle f_i \mid u(e_j) \rangle^2$ ne dépend pas de (e) et (f).

Exercice 4 Soit E un espace euclidien. On considère des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ de E tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle u_i \mid u_j \rangle = \langle v_i \mid v_j \rangle$, et le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une isométrie vectorielle $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(u_i) = v_i$.

a) Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une base de E.

b) Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une famille génératrice de E.

c) Traiter l'exercice dans le cas général.

Endomorphismes symétriques

Exercice 5 Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Montrer que si p est impair il existe un unique endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$.

Exercice 6 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$, et $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $|\mathrm{tr}(\mathrm{AU})| \leqslant \mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 7 Soit A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

a) Montrer que $\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{Y} \rangle = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{AY}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b) En appliquant la méthode de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer l'existence d'une matrice triangulaire supérieure M telle que $\mathrm{A} = \mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M}$.

c) En déduire que $\det \mathrm{A} \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_{kk}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 8 Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ un endomorphisme symétrique tel que $\mathrm{tr}\, u = 0$.

a) Montrer l'existence d'un vecteur non nul $x \in \mathrm{E}$ tel que $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$.

b) En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\langle u(e_i) \mid e_i \rangle = 0$. Que dire de la matrice associée à u dans la base (e) ?