

Espaces euclidiens

Exercice 1 Soit E un espace euclidien de dimension n , et (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs tels que pour tout $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| = 1$. Montrer que (x_1, \dots, x_n) est libre.

Exercice 2 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle M | N \rangle = \text{tr}(M^T N)$, on pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$, et on note J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H .

Exercice 3 On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$, et on note (P_0, \dots, P_n) la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

a) Calculer $P_k(0)^2$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b) On note $H = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$. Quelle est la dimension de H ? Déterminer une base de H^\perp à l'aide des P_0, \dots, P_n .

c) Déterminer $\inf \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - a_1 t - \dots - a_n t^n)^2 dt \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$.

Exercice 4 Soit E un espace euclidien de dimension n . Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une base (u_1, \dots, u_n) de E telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1$.

a) Montrer que ces conditions sont équivalentes à : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \implies \langle u_i | u_j \rangle = 1/2$.

b) Conclure en raisonnant par récurrence.

Exercice 5 Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note Q_n le polynôme $\frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

a) Exprimer le degré et le coefficient dominant de Q_n , et déterminer les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

b) On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis que pour tout $n \geq 1$, Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Calculer $\|Q_n\|$.

d) Exprimer à l'aide de la famille (Q_n) la famille obtenue lorsqu'on applique la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 Soit E un espace euclidien de dimension n . Une famille de p vecteurs (x_1, \dots, x_p) est dite *obtusangle* lorsque $i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle < 0$. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que $p \leq n + 1$.