Corrigé du cahier de vacances

1 – Préliminaires

Vrai/Faux

V - V - V - F - V - F - F - F - F - F - V - V - V

Exercices de révision

Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors $x \geqslant 1 \Leftrightarrow x > 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x \geqslant 1 \Rightarrow x > 0$.
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$.
4. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. Alors $x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.
5. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y$.
6. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors $x = y \Rightarrow xz = yz$.
7. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|x| + |y| = 0 \Rightarrow |x + y| = 0$.
8. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0$.
9. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors $x > y > 0, z > 0 \Rightarrow xz > yz$.
10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 < x \Rightarrow x < 1$.

Exercice

1. Soit $f, g : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.
   Alors $f = g \Rightarrow f(\mathrm{E}) = g(\mathrm{E})$.
2. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{G} \to \mathrm{F}$, $h : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$.
   Alors $f = g \circ h \Rightarrow f(\mathrm{E}) \subset g(\mathrm{G})$.
3. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.
   Alors $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
4. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ surjective.
   Alors $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
5. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ injective.
   Alors $x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
6. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ bijective.
   Alors $x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
7. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$.
   Alors $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective.
8. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$.
   Alors $g \circ f$ est injective $\Leftarrow f, g$ sont injectives.

Exercice

$p = \left\lfloor \dfrac{5n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow p \leqslant \dfrac{5n}{2} < p + 1 \Leftrightarrow n - \dfrac{2}{5} < \dfrac{2p}{5} \leqslant n.$
Ainsi, si $f(n) = f(n')$ alors $n - \dfrac{2}{5} < n'$ et $n' - \dfrac{2}{5} < n$ donc $-\dfrac{2}{5} < n - n' < \dfrac{2}{5}$ et puisque $n - n' \in \mathbb{Z}$, $n - n' = 0$. f est injective, donc réalise une bijection de $\mathbb{N}$ vers $f(\mathbb{N})$.
$f(n) = p \Leftrightarrow n - \dfrac{2}{5} < \dfrac{2p}{5} \leqslant n \Rightarrow n - 1 < \dfrac{2p}{5} \leqslant n$ donc la réciproque de f est définie sur $f(\mathbb{N})$ par $p \mapsto \left\lceil \dfrac{2p}{5} \right\rceil$.

Exercice

f n'est pas injective car $f(-1) = 1 = f(0)$.
En revanche, si $n, n' \in \mathbb{N}^2$ alors $f(n) = f(n') \Leftrightarrow n^2 + n = n'^2 + n' \Leftrightarrow (n - n')(n + n' + 1) = 0 \Leftrightarrow n = n'$ car $n + n' + 1 \geqslant 1$ donc la restriction de f à $\mathbb{N}$ est injective.

Exercice

Notons déjà que $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A})) \Leftrightarrow f(x) \in f(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \exists a \in \mathrm{A} \mid f(x) = f(a)$ donc sans hypothèse sur f on aura toujours $\mathrm{A} \subset f^{-1}(f(\mathrm{A}))$.

Supposons maintenant f injective. Alors pour tout $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$ il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $f(x) = f(a)$ et par injectivité $x = a \in \mathrm{A}$. On a prouvé que $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \subset \mathrm{A}$, d'où l'égalité.

Réciproquement, supposons que pour toute partie $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ on ait $f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$, et montrons que f est injective.
Soit $x, y \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $\mathrm{A} = \{y\}$. alors $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$, donc $x = y$; f est bien injective.

2 – Complexes

Vrai/Faux

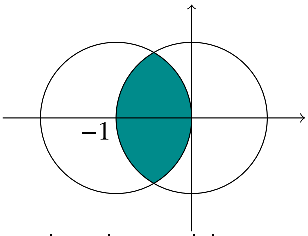
V - F - F - V - V - V - F - V - F - V - V - F

QCM

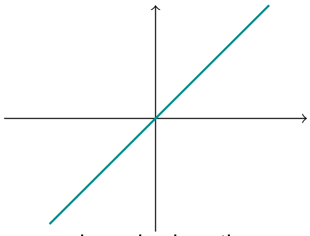
1 - c   2 - b c   3 - b c   4 - b c

Exercices de révision

Exercice



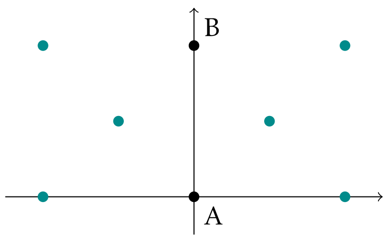
$|z+1| \leqslant 1$ et $|z| \leqslant 1$



$|z-1| = |\overline{z}+i|$

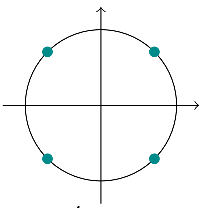
Exercice

affixes	*rectangle*	*isocèle*	*équilatéral*
$A(0), B(4i), C(-19)$	✓	∅	∅
$A(0), B(4i), C(2+2i)$	✓	✓	∅
$A(j), B(1), C(\overline{j})$	∅	∅	✓

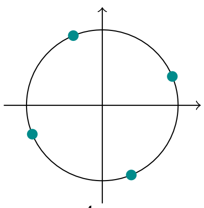


$A(0), B(4i), C(z)$ est isocèle si et seulement si $z \in \left\{2+2i, -2+2i, 4, -4, 4+4i, -4+4i\right\}$.

Exercice



$z^4 = -1$



$z^4 = i$

Exercice

Si $a = 0$ cette équation possède au plus deux solutions.

Si $a \neq 0$, $z^2 + a\overline{z} + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + a\overline{z} + b = 0 \\ \overline{z}^2 + \overline{a}z + \overline{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z} = -\dfrac{z^2+b}{a} \\ \overline{z}^2 + \overline{a}z + \overline{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z} = -\dfrac{z^2+b}{a} \\ \left(\dfrac{z^2+b}{a}\right)^2 + \overline{a}z + \overline{b} = 0 \end{cases}$

La deuxième équation du système obtenu est polynomiale de degré 4 donc elle admet au plus 4 solutions ; il en est *a fortiori* de même de l'équation initiale.

Exercice

$z^n = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = \overline{z} \\ \overline{z}^n = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = \overline{z} \\ z^{2n} = z \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\begin{cases} z^n = \overline{z} \\ z^{2n-1} = 1 \end{cases}$. Si $z \neq 0$, il existe $k \in [\![0, 2n-2]\!]$ tel que $z = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{2n-1}\right)$ et dans ce cas, $z^n = \overline{z} \Leftrightarrow nk \equiv -k \bmod (2n-1) \Leftrightarrow 2n-1$ divise $(n+1)k$.
D'après l'algorithme d'Euclide, $\mathrm{pgcd}(2n-1, n+1) = \mathrm{pgcd}(n-2, 3)$ donc

- Si $n \not\equiv 2 \bmod 3$, $2n-1$ et $n+1$ sont premiers entre eux donc $2n-1$ divise $(n+1)k$ si et seulement si $2n-1$ divise k, soit $k = 0$. Les solutions de $z^n = \overline{z}$ sont $z = 0$ et $z = 1$.
- Si $n \equiv 2 \bmod 3$ il existe p et q premiers entre eux tels que $n+1 = 3p$ et $2n-1 = 3q$ et $2n-1$ divise $(n+1)k$ si et seulement si q divise k, ce qui donne $k = 0$, $k = q = \dfrac{2n-1}{3}$ et $k = 2q = \dfrac{2(2n-1)}{3}$. Les solutions de $z^n = \overline{z}$ sont alors $z = 0$, $z = 1$, $z = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right) = j$, $z = \exp\left(\dfrac{4i\pi}{3}\right) = \overline{j}$.

Exercice

$e^{i\frac{\pi}{5}} - i = e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{7\pi}{20}}\left(e^{-\frac{3\pi}{20}} - e^{\frac{3\pi}{20}}\right) = -2i\sin\left(\dfrac{3\pi}{20}\right)e^{i\frac{7\pi}{20}} = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{20}\right)e^{-i\frac{3\pi}{20}}$ dont un argument est $-\dfrac{3\pi}{20}$.

Exercice

$\dfrac{z+i}{z-1} = \xi \Leftrightarrow z + i = \xi(z-1) \Leftrightarrow (\xi - 1)z = \xi + i \Leftrightarrow z = \dfrac{\xi + i}{\xi - 1}$ donc cette application est involutive (*i.e.* égale à son inverse).

3 – Fonctions usuelles

Vrai/Faux

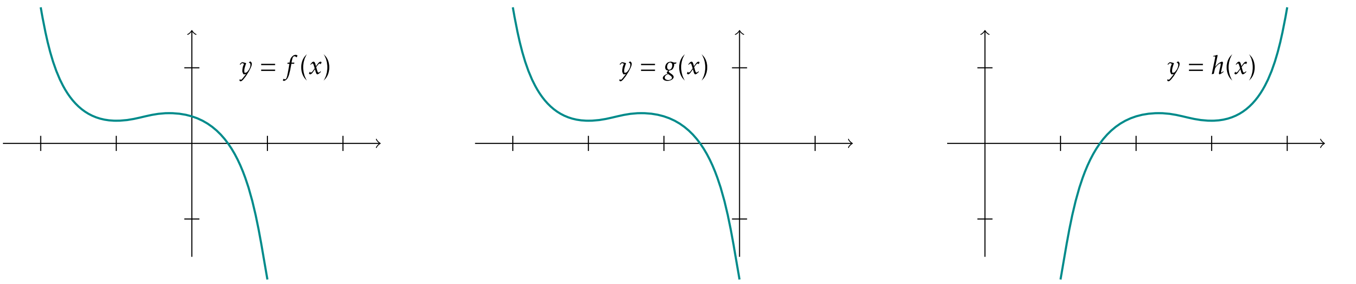
V - F - F - F - F - F - F - F - F - V

QCM

1 - a 2 - b 3 - c 4 - c 5 - d 6 - d

Exercices de révision

Exercice



Exercice

On utilise la formule $\cos a - \cos b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{b-a}{2}\right)$ pour obtenir $\cos(2x) - \cos(3x) = 2\sin\left(\dfrac{5x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. D'où le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{4\pi}{5}$		$\frac{6\pi}{5}$		$\frac{8\pi}{5}$		2π
$\sin\left(\frac{5x}{2}\right)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0
$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$	0	+		+		+		+		+	0
$\cos(2x) - \cos(3x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0

Exercice

Les variations de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sont les suivantes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0

ce qui induit trois cas de figure :

- Si $a < b \leqslant 0$ alors $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$;
- Si $a < 0 < b$ alors $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \min(f(a), f(b))$, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = 1$;
- Si $0 \leqslant a < b$ alors $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$.

Exercice

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est ouvert donc si f atteint un maximum local en a alors $f'(a) = 0$.
Pour $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$ on calcule :

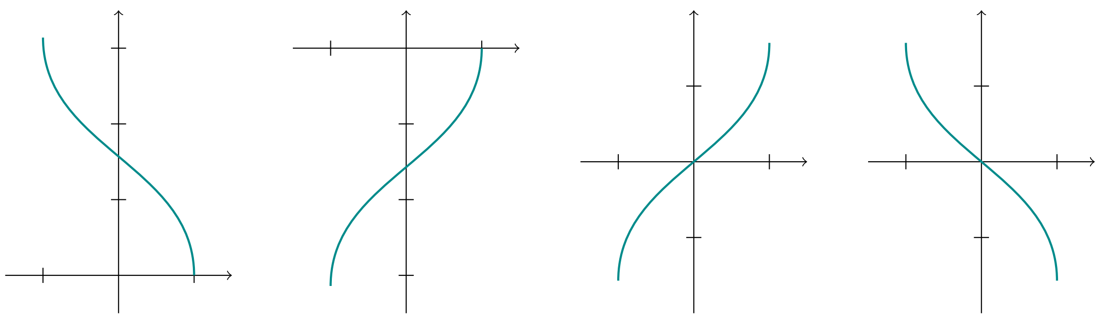
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \mathfrak{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx}\Big) = \mathfrak{Re}\Big(\mathrm{e}^{ix}\frac{\mathrm{e}^{inx}-1}{\mathrm{e}^{ix}-1}\Big) = \mathfrak{Re}\Big(\mathrm{e}^{ix}\frac{\mathrm{e}^{inx/2}}{\mathrm{e}^{ix/2}}\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\Big) = \frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

La première racine de f' sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $a = \dfrac{\pi}{n+1}$. Pour savoir s'il s'agit bien d'un maximum local, on calcule :
$f''(a) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sin(ka) = -\sum_{k=1}^{n} k\sin\Big(\frac{k\pi}{n+1}\Big) < 0$ car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{n+1} \in]0, \pi[$. Il s'agit bien d'un maximum.

Exercice

Soit $f : x \mapsto x^{\alpha}\Big\lfloor \dfrac{1}{x} \Big\rfloor$. Pour tout $x > 1$, $\Big\lfloor \dfrac{1}{x} \Big\rfloor = 0$ donc $f(x) = 0$ et ainsi, $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.
Pour tout $x \in]0, 1[$, $\dfrac{1}{x} - 1 < \Big\lfloor \dfrac{1}{x} \Big\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc $(1-x)x^{\alpha-1} < f(x) \leqslant x^{\alpha-1}$.
Si $\alpha > 1$, par encadrement $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0$; si $\alpha = 1$, par encadrement $\lim\limits_{0^+} f(x) = 1$; si $\alpha < 1$, par minoration $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$.

Exercice



$y = \arccos(x)$ $\quad$ $y = -\arccos(x)$ $\quad$ $y = \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos(x)$ $\quad$ $y = \arcsin(-x)$

Exercice

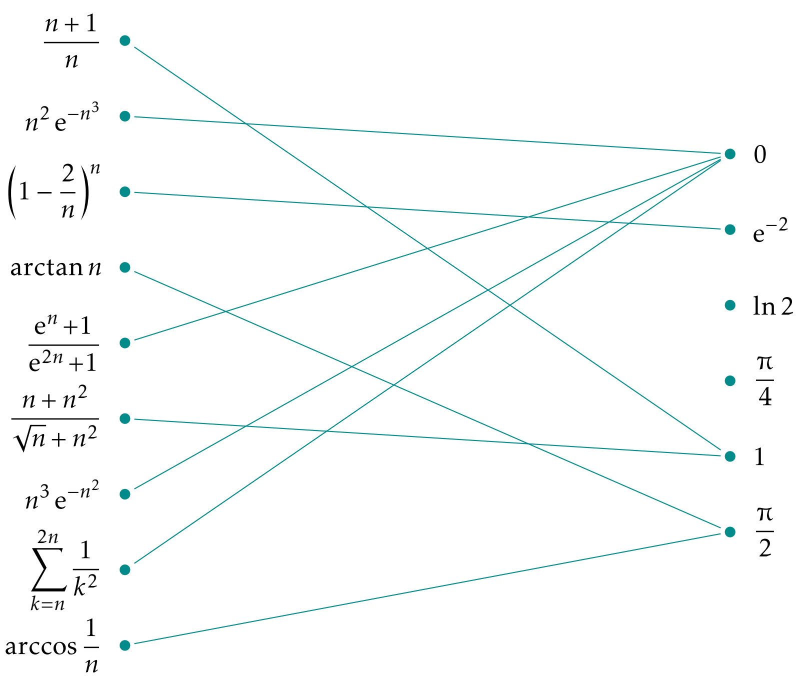
Considérons le triangle de côtés $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, 1 ; il est rectangle d'après le théorème de Pythagore donc l'angle α représenté sur la figure vérifie $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ mais aussi $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.Puisque arcsin et arctan sont à valeurs dans $\Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ on en déduit que $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4 – Suites

Vrai/Faux

V - F - F - V - F - F - F - F - F - V - V

Calculs



Exercices de révision

Exercice

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $1 \leqslant k^{\frac{3}{2}} \leqslant n^{\frac{3}{2}}$ donc $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n^{3/2}}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Par encadrement on en déduit que $\lim u_n = 1$.

Exercice

Puisque c'est vrai pour tout n et tout p on obtient en choisissant $p=n$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_{2n} \leqslant \dfrac{2}{n}$ donc $\lim u_{2n} = 0$. En choisissant maintenant $p = n+1$ on obtient $0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant \dfrac{2n+1}{n^2+n}$ donc $\lim u_{2n+1} = 0$. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 0, donc la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice

Notons (p_n) la suite des nombres premiers. La suite (u_{p_n}) est constante égale à 1 donc converge vers 1 ; la suite (u_{4n}) est constante égale à 0 donc converge vers 0. Il existe deux suites extraites convergeant vers des limites différentes, la suite (u_n) est donc divergente.

Exercice

Notons $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$.

- Si $u_0 > 0$, on a $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ donc (récurrence) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. De plus, pour tout $x > 0$, $f(x) > x$ donc $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$. La suite (u_n) est croissante. Si elle convergeait vers une limite ℓ on aurait $\ell > 0$ et $f(\ell) = \ell$. Il n'y a pas de solution donc (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si $u_0 = 0$ alors la suite (u_n) est constante égale à 0.
- Si $u_0 < 0$, on a $f(\mathbb{R}_-^*) =]-1,0[\subset \mathbb{R}_-^*$ donc (récurrence) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$. De plus, pour tout $x < 0$, $x < f(x)$ donc $u_n < f(u_n) = u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 0 donc converge vers une limite $\ell \leqslant 0$ vérifiant $f(\ell) = \ell$, soit $\ell = 0$.

Exercice

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{k+1}}{(k+1)!}-\dfrac{u_k}{k!}=\dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!}$. En sommant entre 0 et $n-1$ on obtient par télescopage :
$\dfrac{u_n}{n!}-\dfrac{u_0}{0!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$ soit en réindexant : $u_n=n!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}$.

Exercice

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{k+1}}{a^{k+1}}-\dfrac{u_k}{a^k}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{k+1}$. En sommant entre 0 et $n-1$ puis un réindexant on obtient $\dfrac{u_n}{a^n}-\dfrac{u_0}{a^0}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k$, puis $u_n=a^n\left(u_0+\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{1-(b/a)^n}{1-b/a}\right)\right)$. On a $b/a<1$ donc $\lim u_0+\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{1-(b/a)^n}{1-b/a}\right)=u_0+\dfrac{b}{a-b}$.

Puisque $\lim a^n=+\infty$ on peut déjà affirmer que si $u_0+\dfrac{b}{a-b}\neq 0$ la suite (u_n) diverge (vers $\pm\infty$ suivant le signe de cette quantité).

Lorsque $u_0+\dfrac{b}{a-b}=0$ on a $u_n=a^n\left(-\dfrac{b(b/a)^n}{a-b}\right)=\dfrac{-b^{n+1}}{a-b}$ et puisque $\lim b^n=0$ on a cette fois $\lim u_n=0$.

Exercice

Posons $\ell=\lim u_{2n}$. Puisque (u_n) est croissante on a $u_{2n}\leqslant u_{2n+1}\leqslant u_{2n+2}$ et par encadrement, $\lim u_{2n+1}=\ell$. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, donc (u_n) converge.

5 – Continuité

Vrai/Faux

V - V - F - F - F - F - F - F - F - V

Exercices de révision

Exercice

g est bornée donc il existe $a<b$ tel que $g(\mathbb{R})\subset[a,b]$. f est continue donc bornée sur le segment $[a,b]$: il existe $m<M$ tel que $f([a,b])\subset[m,M]$. On en déduit que $f\circ g(\mathbb{R})\subset f([a,b])\subset[m,M]$ donc $f\circ g$ est bornée.
Enfin, $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ donc $g\circ f(\mathbb{R})\subset g(\mathbb{R})\subset[a,b]$ et $g\circ f$ est bornée.

Exercice

Pour tout $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{|x|}\leqslant 1$. f est continue sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ et prolongeable par continuité en 0 donc f est bornée sur $[-1,1]\setminus\{0\}$. On en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice

Posons $A+iB=re^{i\theta}$. Alors $A\cos x+B\sin x=r\big(\cos x\cos\theta+\sin x\sin\theta\big)=r\cos(x-\theta)$. La fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$ donc $A\cos x+B\sin x$ tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $r=0$, soit $A=B=0$.

Exercice

L'application $x\mapsto x-\lfloor x\rfloor$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ donc par composition f est au moins continue sur le même domaine. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\lim_{x\to k^-}x-\lfloor x\rfloor=1$ donc par composition des limites $\displaystyle\lim_{x\to k^-}f\big(x-\lfloor x\rfloor\big)=f(1)$. De même, $\displaystyle\lim_{x\to k^+}x-\lfloor x\rfloor=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to k^+}f\big(x-\lfloor x\rfloor\big)=f(0)$. Cette application est donc continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f(0)=f(1)$.

Exercice

Posons $u_n=\dfrac{x^n}{n!}$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{x}{n+1}$ donc la suite (u_n) croît sur $[\![0,\lfloor x\rfloor]\!]$, puis décroît sur $[\![\lfloor x\rfloor,+\infty[\![$. Ainsi, $f(x)=\dfrac{x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!}$.
Par les théorèmes généraux f est continue sur $\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to n^+}f(x)=\frac{n^n}{n!}=f(n)$ donc f est continue à droite en n.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to n^-}f(x)=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{n^n}{n!}=f(n)$ donc f est continue à gauche en n.
On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- si $n = 1$, il suffit de poser $c = x_1$.
- Si $n > 1$, supposons l'existence de $d \in]0,1[$ tel que $f(d) = \dfrac{f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}$. Alors $u = \dfrac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} = \dfrac{(n-1)f(d)+f(x_n)}{n} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)f(d)+\dfrac{1}{n}f(x_n)$.
  Cette quantité u appartient au segment $[f(d), f(x_n)]$ et f est continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c entre d et x_n, et donc dans $]0,1[$, tel que $u = f(c)$, soit $f(c) = \dfrac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

La récurrence se propage.

Exercice

$g\left(\dfrac{k}{n}\right) = f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ donc par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$.

Cette somme est nulle donc il existe au moins deux termes consécutifs de cette somme, $g\left(\dfrac{k}{n}\right)$ et $g\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$, de signes contraires (au sens large). Mais g est continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha_n \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$ tel que $g(\alpha_n) = 0$, soit $f\left(\alpha_n + \dfrac{1}{n}\right) = f(\alpha_n)$.

Exercice

Par définition de la limite il existe $a < 0$ et $b > 0$ tel que pour tout $x \leqslant a$, $|f(x) - \ell'| \leqslant 1$ et pour tout $x \geqslant b$, $|f(x) - \ell| \leqslant 1$.
En outre, f est continue sur le segment $[a,b]$ donc bornée : il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \max\big(|\ell'|+1, |\ell|+1, \mathrm{M}\big)$: f est bornée.
Posons $\alpha = \inf_{\mathbb{R}} f$ et $\beta = \sup_{\mathbb{R}} f$. Supposons que f n'atteigne aucune de ces deux bornes. Alors $\ell = \alpha$ et $\ell' = \beta$ (ou le contraire). Mais si $\ell = \ell'$ alors $\alpha = \beta$, ce qui signifie que f est constante, ce qui est absurde car dans ce cas les deux bornes sont atteintes en tout point de $\mathbb{R}$. Ainsi, f atteint au moins l'une de ses deux bornes.

Exercice

f est continue donc bornée sur $[0,\mathrm{T}]$, et atteint ses bornes en $u < v$ dans $[0,\mathrm{T}]$. On a alors $f(\mathbb{R}) = \big[f(u), f(v)\big] = f([u,v])$.
Si $v \leqslant u + \dfrac{\mathrm{T}}{2}$ on pose $a = u$ et on a bien $f(\mathbb{R}) = f\left(\left[a, a+\dfrac{\mathrm{T}}{2}\right]\right)$.
Si $u + \dfrac{\mathrm{T}}{2} < v \leqslant \mathrm{T}$ on pose $a = v$ car alors $f(u) = f(u+\mathrm{T})$ et $u + \mathrm{T} \leqslant v + \dfrac{\mathrm{T}}{2}$ donc $f(\mathbb{R}) = f([v, u+\mathrm{T}]) = f\left(\left[a, a+\dfrac{\mathrm{T}}{2}\right]\right)$.

Exercice

f est continue sur le segment $[0,1]$ donc est majorée et atteint son majorant en un point $a \in [0,1]$. Notons déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant f(a)$.
f est continue en a donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(a) - \epsilon \leqslant f(x) \leqslant f(a)$.
Lorsque $n \geqslant \dfrac{1}{\eta}$ il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\left|\dfrac{k}{n} - a\right| \leqslant \eta$. On a alors $f(a) - \epsilon \leqslant f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ et donc $f(a) - \epsilon \leqslant u_n \leqslant f(a)$.
Pour tout $\epsilon > 0$ nous avons prouvé l'existence d'un rang à partir duquel $f(a) - \epsilon \leqslant u_n \leqslant f(a)$, autrement dit $\lim u_n = f(a)$.

6 – Dérivabilité

■ Vrai/Faux

V - F - V - F - V - V - V - F - F - V - F - F

■ QCM

1 - d 2 - b

Calculs

Exercice

$x(x-1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1-x)^2}$ $\qquad \dfrac{-2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)^2}$ $\qquad \dfrac{-2}{x(x^2+1)}$ $\qquad \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$

Exercice

$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ $\qquad \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Exercice

$f(x) \underset{0^+}{=} \dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{x}+(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}x+\mathrm{o}(x)$ et $f(x) \underset{0^-}{=} \dfrac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{x}+(\mathrm{C}-\mathrm{D})+\dfrac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{2}x+\mathrm{o}(x)$ donc f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{C}+\mathrm{D}=0$ et $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{C}-\mathrm{D}$ soit $\mathrm{C}=\mathrm{A}$ et $\mathrm{D}=\mathrm{B}=-\mathrm{A}$. Dans ce cas, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=\mathrm{A}\dfrac{e^x-\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

Exercice

Par les théorème généraux f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et on prouve par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ l'existence d'un polynôme P_n tel que pour tout $x<0$, $f^{(n)}(x)=\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}$. Par croissances comparées on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(n)}(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x)$ et le théorème de la limite de la dérivée permet de prouver par récurrence que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercices de révision

Exercice

f atteint au moins une de ses bornes en un point $c\in\mathbb{R}$ (ceci est démontré dans un exercice de la section consacrée à la continuité), et en ce point, $f'(c)=0$.

Exercice

Quitte à considérer $-f$, on suppose $f'(a)>0$ et $f'(b)<0$. Il existe alors $\eta_1>0$ et $\eta_2>0$ tel que f soit strictement positive sur $[a,a+\eta_1]$ et strictement négative sur $[b-\eta_2,b]$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors l'existence de $c_2\in]a+\eta_1,b-\eta_2[$ tel que $f(c)=0$. Le théorème de Rolle prouve enfin l'existence de $c_1\in]a,c_2[$ et de $c_3\in]c_2,b[$ tels que $f'(c_1)=f'(c_3)=0$.

Exercice

Supposons $\ell>0$, et considérons alors un réel $k\in]0,\ell[$. Il existe $a>0$ tel que pour tout $t\geqslant a$, $f'(t)>k$. En intégrant on obtient : $\forall x\geqslant a$, $\displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x k\,\mathrm{d}t$, soit $f(x)-f(a)\geqslant k(x-a)$. Par minoration on en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$, ce qui contredit l'hypothèse f bornée.
Si $\ell<0$, on applique le raisonnement précédent à $-f$ pour obtenir cette fois que $\lim\limits_{+\infty} f(x)=-\infty$, ce qui est là encore contradictoire.

7 – Études locales

Vrai/Faux

V - F - F - F - V - V - V - V - V - F - V - F

QCM

1 - a b d $\quad$ 2 - b $\quad$ 3 - a $\quad$ 4 - a c d $\quad$ 5 - d $\quad$ 6 - d

Exercices de révision

Exercice

$v_n=u_n+\mathrm{o}(u_n)=u_n\big(1+\mathrm{o}(1)\big)$ donc $\ln(v_n)=\ln(u_n)+\ln(1+\mathrm{o}(1))=\ln(u_n)+\mathrm{o}(1)$.
Or $\lim u_n=+\infty$ donc $\lim\ln(u_n)=+\infty$, ce qui permet d'écrire *a fortiori* $\ln(v_n)=\ln(u_n)+\mathrm{o}\big(\ln(u_n)\big)$, soit $\ln(v_n)\sim\ln(u_n)$.
En revanche, si on pose $u_n=n^2$ et $v_n=n^2+n$ on a bien $v_n\sim u_n$ et $\lim u_n=+\infty$ et pourtant $\dfrac{\mathrm{e}^{v_n}}{\mathrm{e}^{u_n}}=\mathrm{e}^n\to+\infty$ donc e^{v_n} n'est pas équivalent à e^{u_n}.

Exercice

$\sqrt{n^2+1} = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = n+\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On en déduit que $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice

$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc les assertions 1 et 2 sont correctes.

$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc 3 est incorrect et 4 est correct.

Exercice

$\arctan(x) \underset{0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\mathrm{o}(x^5)$. $\qquad \frac{\mathrm{ch}(x)}{\cos(x)} \underset{0}{=} 1+x^2+\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^5}\right)$.

Exercice

$f+g$ est développable à l'ordre $\mathrm{o}(x^4)+\mathrm{o}(x^6)=\mathrm{o}(x^4)$; $f\times g$ est développable à l'ordre $x^2\mathrm{o}(x^6)+x^3\mathrm{o}(x^4)=\mathrm{o}(x^7)$; $f\circ g$ est développable à l'ordre $\mathrm{o}\left((x^3)^4\right)=\mathrm{o}(x^7)$; $g\circ f$ est développable à l'ordre $\mathrm{o}\left((x^2)^6\right)=\mathrm{o}(x^8)$.

Exercice

D'après les théorèmes généraux f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et $f'(x)=2+\cos x>0$ donc f réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R})$. Enfin, $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$ donc $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

f' ne s'annule pas donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et possède ainsi un $\mathrm{DL}_3(0)$ que l'on note $f^{-1}(x)\underset{0}{=}a+bx+cx^2+dx^3+\mathrm{o}(x^3)$.

f est impaire donc f^{-1} aussi, donc $a=c=0$.

$x=f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}\left(3x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)\right)=b\left(3x-\frac{x^3}{6}\right)+d(3x)^3+\mathrm{o}(x^3)=3bx+\left(27d-\frac{b}{6}\right)+\mathrm{o}(x^3)$ et par unicité du DL, $3b=1$ et $27d-\frac{b}{6}=0$ soit $b=\frac{1}{3}$ et $d=\frac{1}{486}$ donc $f^{-1}(x)\underset{0}{=}\frac{x}{3}+\frac{x^3}{486}+\mathrm{o}(x^3)$.

Exercice

$f(x)=x$ et $g(x)=x+2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ conviennent.

8 – Équations différentielles

Vrai/Faux

F - F - V - F - F - V - F - F - F - F

QCM

1 - c 2 - b c 3 - b

Calcul

Exercice

$y(x)=\frac{x\,\mathrm{e}^{\omega x}}{2\omega}+\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\omega x}+\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-\omega x}$ avec $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{R}^2$.

Exercice

Les solutions dans $\mathbb{C}$ s'écrivent $y(x)=\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-(1+i)x}$ avec $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{C}$.
les solutions réelles sont celles qui vérifient $\overline{y(x)}=y(x)$ soit $\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{-2x}+\overline{\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{-(1-i)x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, ce qui impose $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}=0$. Le solutions réelles s'écrivent donc $y(x)=\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$.

Exercices de révision

Exercice

Ainsi formulée, A dépend de x : tout simplement $A = f(x)e^{-3x}$. Une formulation plus pertinente serait : « si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y' = 2y$ alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Ae^{2x}$ ».

Exercice

C'est une conséquence du théorème de Cauchy : pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution f vérifiant $f(x_0) = y_0$; autrement dit par tout point (x_0, y_0) du plan passe une unique courbe représentative d'une solution de l'équation différentielle.

Exercice

La fonction u vérifie $u' = -i\omega u$ donc il existe $K \in \mathbb{C}$ tel que $u = Ke^{-i\omega t}$.
Si on pose $K = A + iB$ alors $x' = \mathfrak{Re}(u) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ et $y' = \mathfrak{Im}(u) = B\cos(\omega t) - A\sin(\omega t)$ donc

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\Big(A\sin(\omega t) - B\cos(\omega t)\Big) + C \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{1}{\omega}\Big(B\sin(\omega t) + A\cos(\omega t)\Big) + D$$

et enfin $z(t) = Et + F$ avec $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.

Exercice

On calcule $W'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x) = f(x)\Big(-\Big(1+\frac{2}{x}\Big)g'(x) - \Big(1+\frac{1}{x}\Big)g(x)\Big) - \Big(-\Big(1+\frac{2}{x}\Big)f'(x) - \Big(1+\frac{1}{x}\Big)f(x)\Big)g(x) = -\Big(1+\frac{2}{x}\Big)\Big(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\Big) = -\Big(1+\frac{2}{x}\Big)W(x)$. On en déduit l'existence de $A \in \mathbb{R}$ tel que $W(x) = A\frac{e^{-x}}{x^2}$.

9 – Intégration

Vrai/Faux

V - V - V - F - F - F - F - V - V

QCM

1 - a 2 - c 3 - b 4 - c

Calculs

Exercice

$$\int_0^1 t^2 e^t \,dt = e - 2 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \,dt = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Exercice

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t \,dt = \frac{1}{3} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^3 t \,dt = \frac{1}{4} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,dt = \frac{3\pi}{16} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t \,dt = \frac{1}{12}$$

Exercice

$\dfrac{x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{(x+1/2)+1/2}{(x+1/2)^2+3/4} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2x+1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1} + \dfrac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}\right)$ donc les primitives recherchées sont :

$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(2x+1)^2}{3} + 1\Big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + C^{te}$$

Exercices de révision

Exercice

Pour tout $n \geqslant 2$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-1}\cos t \,dt = \Big[(\cos t)^{n-1}\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2(\cos t)^{n-2}\,dt \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)(\cos t)^{n-2}\,dt = (n-1)(W_{n-2} - W_n) \end{aligned}$$

donc $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$.
De même, une intégration par parties donne :

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt$$

et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$, soit $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n$.
On observe que $W_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} W_{2(n-1)}$. Sachant que $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = I_1$, on prouve par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $I_n = W_{2(n-1)}$.
Pour suivre l'énoncé, on peut aussi poser $t = \tan\theta$ pour obtenir $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\arctan x} (\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta$ et en faisant tendre x vers $+\infty$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}\theta\,d\theta = W_{2(n-1)}$.

Exercice

La réponse est $\displaystyle\int_2^x 1 \times \frac{1}{\ln t}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$, mais c'est difficile à justifier avec le programme de PCSI.

Exercice

On réalise une intégration par parties : pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_x^1 (\ln t)^n \times 1\,dt = \Big[t(\ln t)^n\Big]_x^1 - n\int_x^1 (lnt)^{n-1}\,dt = -x(\ln x)^n - n\int_x^1 (\ln t)^{n-1}\,dt$$

Sachant que $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^n = 0$ on prouve par récurrence que $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^1 (\ln t)^n\,dt$ existe et vaut $(-1)^n n! \times \lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^1 (\ln t)^0\,dt = (-1)^n n!$.

Exercice

Pour $x > 0$, $\left|\displaystyle\int_x^{2x} \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt\right| \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| dt \leqslant \int_x^{2x} dx = x$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{2x} \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt = 0$. On procède de même pour $x < 0$.

Exercice

$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ donc pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + 2\sin x \cos x}$. On en déduit que $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ conduit à $I = J$, donc $I = J = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice

Le dessin est explicite : $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ est l'aire du demi-disque $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ qui vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

10 – Séries numériques

Vrai/Faux

V - F - V - V - V - F - V - F - F - F

Calculs

Exercice

Posons $S_i = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.
Par hypothèse on a $S_i + S_p = \dfrac{\pi^2}{6}$, mais on a aussi $S_p = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$, donc $S_i = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{8}$.
Enfin, en séparant termes d'indices pairs et impairs on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -S_i + S_p = -\frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice

$\left(2+\frac{1}{n}\right)^n r^n = (2r)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = (2r)^n \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) \sim \sqrt{e}(2r)^n$ donc la série converge si et seulement si $|2r|<1$, soit $|r|<1/2$.

Exercice

Sachant que $j^3=1$ on a $u_n = \frac{j^n}{\sqrt{n+1}}$. Ainsi, $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum |u_n|$ diverge.
Il est possible de montrer que $\sum u_n$ converge mais c'est difficile (*transformée d'Abel*).

Exercice

Si $\alpha \neq 1$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}} + \mathrm{C^{te}}$; si $\alpha=1$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln(\ln x) + \mathrm{C^{te}}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est décroissante donc par comparaison à une intégrale on en déduit que $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si et seulement si les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ possèdent une limite en $+\infty$, autrement dit si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ décroit donc pour tout $k \geqslant 2$, $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. En sommant ces inégalités entre $n+1$ et N on obtient : $\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ On calcule les deux intégrales :

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{\mathrm{N}^{\alpha-1}}\right)$$

puis on fait tendre N vers $+\infty$: $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.On en déduit que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Exercice

La fonction ln est croissante donc $\int_{k-1}^k (\ln t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant (\ln k)^2 \leqslant \int_k^{k+1} (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.

On somme entre 2 et n : $\int_1^n (\ln t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^n (\ln k)^2 \leqslant \int_2^{n+1} (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$ puis on calcule les deux intégrales.

Une intégration par parties donne $\int (\ln t)^2\,\mathrm{d}t = t(\ln t)^2 - 2\int (\ln t)\,\mathrm{d}t = t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t + \mathrm{C^{te}}$ d'où :

$$n(\ln n)^2 - 2n\ln n + 2n - 2 \leqslant \sum_{k=2}^n (\ln k)^2 \leqslant (n+1)(\ln(n+1))^2 - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2(\ln 2)^2 + 4\ln 2 - 4$$

On en déduit que $\sum_{k=2}^n (\ln k)^2 \sim n(\ln n)^2$ puis que $\frac{1}{\sum_{k=2}^n (\ln k)^2} \sim \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

■ Exercices de révision

Exercice

Notons $a_p\mathrm{X}^p$ le terme dominant de P, et $b_q\mathrm{X}^q$ celui de Q. Alors $\frac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)} \sim \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$ donc $\sum \frac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)}$ converge si et seulement si $p-q<-1$, soit $\deg \mathrm{P} < \deg \mathrm{Q} - 1$.

Exercice

Une condition nécessaire pour que $\sum u_n$ converge est de $\lim u_n = 0$. Or une suite périodique ne converge que si elle est constante, donc lorsque (u_n) est périodique, $\sum u_n$ converge si et seulement si (u_n) est la suite nulle.

Exercice

Si $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$ et dans ce cas $v_n \sim u_n$ donc $\sum v_n$ converge.
Réciproquement on a $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ donc si $\sum v_n$ converge alors $\lim v_n = 0$ et dans ce cas $u_n \sim v_n$ donc $\sum u_n$ converge.

Exercice

Si $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$. Étant décroissante on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Puisque $\sum u_n$ converge on a $\sum_{k=n}^{2n} u_k = \sum_{k=0}^{2n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$.

Par décroissance on a pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, $u_{2n} \leqslant u_k$ donc en sommant : $0 \leqslant (n+1)u_{2n} \leqslant \sum_{k=n}^{2n} u_k$. Ainsi, $\lim n u_{2n} = 0$.

On en déduit que $\lim(2n)u_{2n} = 0$, et $0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n}$ donc $\lim(2n+1)u_{2n+1} = 0$.
Il en résulte que $\lim n u_n = 0$.

Ce résultat peut être mis en défaut lorsque (u_n) n'est pas décroissante : si on pose $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré non nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ la série $\sum u_n$ converge (car $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge) mais (nu_n) ne tend pas vers 0.

11 – Polynômes

Vrai/faux

V - F - F - F - F - V - V - F - V - V - F

QCM

1 - d 2 - c 3 - b 4 - b

Calculs

Exercice

Si $X^n = (X^2+1)Q(X)+a_nX+b_n$ on substitue à X les valeurs i et $-i$ pour obtenir les relations $i^n = a_n i + b_n$ et $(-i)^n = -a_n i + b_n$ et en déduire $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2i} i^n$ et $b_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} i^n$, autrement dit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b_n = \begin{cases} (-1)^p & \text{si } n = 2^p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

Si $X^n = (X-1)^3Q(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$ on a aussi $nX^{n-1} = 3(X-1)^2Q(X) + (X-1)^3Q'(X) + 2a_nX + b_n$ et $n(n-1)X^{n-2} = 6(X-1)Q(X) + 6(X-1)^2Q'(X) + (X-1)^3Q''(X) + 2a_n$ et en substituant 1 à X dans chacune de ces équations on obtient les relations $1 = a_n + b_n + c_n$, $n = 2a_n + b_n$ et $n(n-1) = 2a_n$, soit $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $b_n = n(2-n)$ et $c_n = -\dfrac{n}{2}$.

Exercice

On résout dans $\mathbb{C}$: $z^{2n+1} = -1 = e^{i\pi}$, soit $z = e^{\frac{i\pi}{2n+1}} \times e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} = e^{\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}} = \omega_k$ avec $k \in [\![0, 2n]\!]$. La seule racine réelle est $\omega_n = -1$; chacune des autres ω_k est accompagnée de sa conjuguée ω_{2n-k} pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc :

$$X^{2n+1} + 1 = (X+1)\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)(X-\overline{\omega}_k) = (X+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)X + 1\right)$$

Exercice

Si $(\mathrm{P}')^2 = \mathrm{P}$ alors le degré n de P vérifie $2(n-1) = n$ soit $n = 2$. On pose alors $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ et on remplace dans l'équation pour obtenir $(2a\mathrm{X}+b)^2 = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ soit $4a^2 = a$, $4ab = b$, $b^2 = c$ ce qui donne $a = \dfrac{1}{4}$ et $c = b^2$. Il s'agit donc des polynômes $\dfrac{1}{4}\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + b^2$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice

$\mathrm{P} = \mathrm{X}^8 - 1 = \displaystyle\prod_{\omega\in\mathbb{U}_8}(\mathrm{X}-\omega)$ donc $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_8}\frac{1}{\mathrm{X}-\omega}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_!}\frac{1}{2-\omega} = \frac{\mathrm{P}'(2)}{\mathrm{P}(2)} = \frac{2^{10}}{2^8-1} = \frac{1024}{255}$.

Exercices de révision

Exercice

Si ω est racine multiple de P_n alors $\mathrm{P}_n(\omega) = \mathrm{P}_n'(\omega) = 0$. Mais $\mathrm{P}_n' = \mathrm{P}_{n-1}$ donc $\mathrm{P}_n(\omega) = \mathrm{P}_{n-1}(\omega) = 0$. En particulier, $0 = (\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_n')(\omega) = \dfrac{\omega^n}{n!}$ donc $\omega = 0$, ce qui est absurde car 0 n'est pas racine de P_n. Les racines de P_n sont donc toutes simples.

Exercice

Supposons P_n scindé sur $\mathbb{R}$: on pose alors $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-r_1)\cdots(\mathrm{X}-r_n)$ avec $r_1,\dots,r_n \in \mathbb{R}$ et $n = \deg \mathrm{P}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|\mathrm{P}(z)| = |z-r_1|\cdots|z-r_n|$ avec $|z-r_k| = \sqrt{(\mathfrak{Re}(z)-r_k)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} \geqslant \left|\mathrm{Im}(z)\right|$ donc $|\mathrm{P}(z)| \geqslant \left|\mathrm{Im}(z)\right|^n$.
Réciproquement, supposons $|\mathrm{P}(z)| \geqslant \left|\mathrm{Im}(z)\right|^n$ avec $n = \deg \mathrm{P}$ et $z \in \mathbb{C}$.
P est scindé sur $\mathbb{C}$; considérons une de ses racines complexe ω. On a $0 = |\mathrm{P}(\omega)| \geqslant \left|\mathrm{Im}(\omega)\right|^n$ donc $\mathrm{Im}(\omega) = 0$, soit $\omega \in \mathbb{R}$.
P est bien scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Notons $\overline{\mathrm{P}}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. On a $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{P}+\overline{\mathrm{P}})$ et $\mathrm{B} = \dfrac{1}{2i}(\mathrm{P}-\overline{\mathrm{P}})$.
Par ailleurs, si $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-z_1)\cdots(\mathrm{X}-z_n)$ alors $\overline{\mathrm{P}} = (\mathrm{X}-\overline{z}_1)\cdots(\mathrm{X}-\overline{z}_n)$.
Si z est racine de A on a donc $(z-z_1)\cdots(z-z_n) = -(z-\overline{z}_1)\cdots(z-\overline{z}_n)$ et donc $\displaystyle\prod_{k=1}^n |z-z_k| = \prod_{k=1}^n |z-\overline{z}_k|$.

Observons maintenant le dessin : si $\mathrm{Im}\, z > 0$ alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $|z-z_k| < |z-\overline{z}_k|$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^n |z-z_k| < \prod_{k=1}^n |z-\overline{z}_k|$, ce qui est absurde.
De même, si $\mathrm{Im}\, z < 0$ alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $|z-\overline{z}_k| < |z-z_k|$, et on aboutit là encore à une absurdité. On en déduit que $\mathrm{Im}\, z = 0$, autrement dit que $z \in \mathbb{R}$.

12 – Espaces vectoriels

Vrai/Faux

V - F - V - F - V - F - F

QCM

1 - a 2 -c d

Exercices de révision

Exercice

2 - 4 - 5

Exercice

1. (x,y,z) liée $\Leftarrow x \in \mathrm{Vect}(y,z)$
2. $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$
3. $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel $\Leftarrow F \subset G$
4. $F + G = G \Leftrightarrow F \subset G$

Exercice

Si $x \in F' \cap G$ alors $x \in F'$ et $x \in F \cap G$ donc $x = 0_E$ car F' et $F \cap G$ sont en somme directe.
Soit $x \in E$; il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Et il existe $y_1 \in F'$ et $y_2 \in F \cap G$ tels que $y = y_1 + y_2$. Alors $x = y_1 + (y_2 + z) \in F' + G$ donc $E = F' + G$. On en déduit que $E = F' \oplus G$.

Exercice

Supposons $F + \mathrm{Vect}(x) = F + \mathrm{Vect}(y)$. Alors $x \in F + \mathrm{Vect}(y)$ donc il existe $z_1 \in F$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que $x = z_1 + \beta y$.
De même, $y \in F + \mathrm{Vect}(x)$ donc il existe $z_2 \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $y = z_2 - \alpha x$.
On a alors $\alpha x + \beta y = \alpha z_1 + \beta z_2 \in F$ donc $z + \alpha x + \beta y = 0_E$ en posant $z = -\alpha z_1 - \beta z_2 \in F$.
Supposons que l'on ait $\alpha = 0$. Cela signifie que $y \in F$; mais dans ce cas x appartient aussi à F, et on peut écrire $z + x + y = 0_E$ en posant $z = -x - y \in F$. C'est la même chose si $\beta = 0$, donc dans tous les cas il y a moyen de trouver α et β non nuls et $z \in F$ tels que $z + \alpha x + \beta y = 0_E$.

Réciproquement, supposons que $z + \alpha x + \beta y = 0_E$ avec $z \in F$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.
On a $x = -\dfrac{1}{\alpha}(z + \beta y) \in F + \mathrm{Vect}(y)$ donc $F + \mathrm{Vect}(x) \subset F + \mathrm{Vect}(y)$ et de manière symétrique, $y = -\dfrac{1}{\beta}(z + \alpha x) \in F + \mathrm{Vect}(x)$ donc $F + \mathrm{Vect}(y) \subset F + \mathrm{Vect}(x)$. D'où l'égalité.

13 – Applications linéaires

Vrai/Faux

V - V - F - V - V - F - F - V - F - F - V

QCM

1 - d 2 - a b c d 3 - b c

Exercices de révision

Exercice

On prouve par récurrence sur k que $u^k \circ v - v \circ u^k = ku$.

Exercice

Les applications linéaires $\phi_1 : v \mapsto u \circ v$ et $\phi_2 : v \mapsto v \circ u$ commutent (car $\phi_1 \circ \phi_2(v) = u \circ v \circ u = \phi_2 \circ \phi_1(u)$ donc d'après la formule du binôme, $\phi^k(v) = (\phi_1 - \phi_2)^k(v) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \phi_1^i \circ \phi_2^{k-i}(v) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} u^i \circ v \circ u^{k-i}$

Exercice

Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mu \mathrm{Id})$ alors $u(x) - \lambda x = 0_E$ et $u(x) - \mu x = 0_E$ donc $(\lambda - \mu)x = 0_E$, et $\lambda \neq \mu \Rightarrow x = 0_E$. La somme $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mu \mathrm{Id})$ est directe.

Exercice

$u \circ v = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, u\big(v(x)\big) = 0_E \Leftrightarrow \forall x \in E,\ v(x) \in \mathrm{Ker}\, u \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$.

Exercice

Pour tout $x \in \mathrm{Ker}\, v$, $v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(0_E) = 0_E$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\, v$, ce qui prouve que $u(\mathrm{Ker}\, v) \subset \mathrm{Ker}\, v$.
Pour tout $y \in \mathrm{Im}\, v$ il existe $x \in E$ tel que $u = v(x)$. Alors $u(y) = u \circ v(x) = v \circ u(x) \in \mathrm{Im}\, v$, donc $u(\mathrm{Im}\, v) \subset \mathrm{Im}\, v$.

Exercice

Supposons $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$, et considérons $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$. Alors $u(y) = 0_E$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, donc $u^2(x) = 0_E$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(u^2) = \operatorname{Ker} u$, donc $u(x) = 0_E$, soit $y = 0_E$. On a prouvé que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$. Pour tout $x \in E$ on a $u(x) = 0_E \Rightarrow u^2(x) = 0_E$ donc $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(u^2)$.
À l'inverse, considérons $x \in \operatorname{Ker}(u^2)$. Alors $u^2(x) = 0_E$ donc $u(x) \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, et $u(x) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker} u$. Par double inclusion on a prouvé que $\operatorname{Ker}(u^2) = \operatorname{Ker} u$.

Supposons $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$. Pour tout $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Im}(u^2)$ donc il existe $z \in E$ tel que $u(x) = u^2(z)$, ce qui implique $x - u(z) \in \operatorname{Ker} u$. On a ainsi $x = (x - u(z)) + u(z) \in \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$ donc $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$.
Réciproquement, supposons $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$. L'inclusion $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im} u$ est évidente. À l'inverse, si $x \in \operatorname{Im} u$ alors il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$, et par hypothèse $z \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u$ donc il existe $a \in \operatorname{Ker} u$ et $b \in E$ tel que $z = a + u(b)$. On a alors $x = u(a) + u^2(b) = u^2(b)$ donc $x \in \operatorname{Im}(u^2)$. Par double inclusion on a prouvé que $\operatorname{Im}(u^2) = \operatorname{Im} u$.

Exercice

$u^n(x_0) \in E = \operatorname{Vect}\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ donc il existe $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^n(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$.
Posons $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$. Par définition on a $u^n(x_0) = v(x_0)$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $u^n\big(u^k(x_0)\big) = u^n \circ u^k(x_0) = u^k \circ u^n(x_0) = u^k \circ v(x_0) = v \circ u^k(x_0) = v\big(u^k(x_0)\big)$ car u et v commutent de manière évidente.
Nous avons prouvé que u^n et v coïncident sur une base, donc $u^n = v$.

Exercice

Soit $v \in F_1 \cap F_2$: il existe u_1 et u_2 dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $v = u_1 \circ p$ et $v = u_2 \circ (\mathrm{Id} - p)$.
Puisque $p \circ p = p$ on a $v = u_1 \circ p = u_1 \circ p \circ p = u_2 \circ (\mathrm{Id} - p) \circ p = u_2 \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc la somme $F_1 \oplus F_2$ est directe.
Soit maintenant $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\mathrm{Id} = p + (\mathrm{Id} - p)$ donc $u = u \circ p + u \circ (\mathrm{Id} - p) \in F_1 + F_2$ donc $\mathcal{L}(E) \subset F_1 + F_2$. L'inclusion réciproque relève de l'évidence, donc $\mathcal{L}(E) = F_1 \oplus F_2$.

14 – Dimension

Vrai/Faux

V - F - V - F - F - V - F - V

QCM

1 - a   2 - a   3 - d   4 - a d   5 - c

Exercices de révision

Exercice

L'application $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $u(Q) = PQ$ est linéaire donc $F_P = \mathbb{R}_n[X] \cap (\operatorname{Im} u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après le principe de la division euclidienne, tout polynôme $M \in \mathbb{R}_n[X]$ se décompose de manière unique sous la forme $M = PQ + R$ avec $PQ \in F_P$ et $R \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, en ayant posé $d = \deg P$. Ceci signifie que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \oplus \mathbb{R}_{d-1}[X]$, et ainsi d'après le théorème du rang $\dim F_P = (n+1) - d = n + 1 - \deg P$.

Exercice

Notons E cet espace vectoriel. l'application $\phi : E \to \mathbb{R}^{N+1}$ définie par $\phi(f) = \big(f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_N)\big)$ est un isomorphisme, donc $\dim E = \dim(\mathbb{R}^{N+1}) = N + 1$.

Exercice

Si $F \subset H$ alors $F \cap H = F$ et $\dim F \cap H = p$.
Si $F \subsetneq H$ il existe $a \in F$ tel que $a \notin H$. Alors $E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$, avec pour conséquence que $F + H = E$. D'après la formule de Grassmann on a alors $\dim(F \cap H) = \dim F + \dim H - \dim(F + H) = p + (n-1) - n = p - 1$.

Exercice

Considérons l'application $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\phi(P) = P - P'$. Cette application est linéaire et injective (car le seul polynôme vérifiant $P' = p$ est le polynôme nul) donc est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Le polynôme X^n possède donc un unique antécédent.

Exercice

Si u est un isomorphisme alors $\dim u(F) = \dim F$ donc une condition nécessaire est que $\dim F = \dim G$.
Réciproquement, supposons $\dim F = \dim G$, et considérons alors deux bases $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ respectivement de F et G. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter chacune de ces deux familles libres pour former deux bases $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_p, g_{p+1}, g_n)$ de E. L'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $u(f_k) = g_k$, $k \in [\![1, n]\!]$ est un isomorphisme car l'image d'une base est une base, et elle vérifie $u(F) = G$.

Exercice

On a $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker}(u \circ v)$ donc $n - \operatorname{rg} v \leqslant n - \operatorname{rg}(u \circ v)$, soit encore $\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \operatorname{rg} v$.
De même, en écrivant $v = u^{-1} \circ (u \circ v)$ on obtient $\operatorname{Ker}(u \circ v) \subset \operatorname{Ker} v$, ce qui conduit à l'aide du théorème du rang à $\operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v)$. D'où l'égalité.

15 – Matrices

Vrai/Faux

V - V - V - V - F - F - F - F - V - V - V - V

QCM

1 - a   2 - a   3 - c

Calculs

Exercice

On calcule sans peine $J^2 = nJ$ puis on prouve par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $J^p = n^{p-1}J$.

Exercice

$A^n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \end{pmatrix}$. On montre ensuite par récurrence que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice

On pose $A = \operatorname{Mat}_{(e)}(u)$; alors $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = 2e_1$ et $u(e_k) = e_{k-1}$ pour $k \geqslant 3$.

On prouve alors par récurrence sur $p \in [\![1, n-1]\!]$ que $u^p(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leqslant p \\ 2e_1 & \text{si } k = p+1 \\ e_{k-p} & \text{si } k \geqslant p+2 \end{cases}$

En particulier, ceci conduit à $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice

On pose $A = \sum_{k,l} a_{kl} E_{kl}$ et on utilise la formule $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ pour obtenir $E_{ij}A = \sum_{l} a_{jl}E_{jl}$ et $AE_{ij} = \sum_{k} a_{ki}E_{kj}$.

Exercices de révision

Exercice

Notons $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices triangulaires supérieures et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques. On a $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})\cap\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ donc la somme $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est directe. De plus, $\dim\mathcal{T}_n(\mathbb{R})+\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$ donc $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice

Notons F l'ensemble des matrices en damier. Il s'agit d'un espace vectoriel car engendré par les matrices E_{ij} avec $j \equiv i \mod 2$. Lorsque n est pair cette famille est de cardinal $n^2/2$ donc dans ce cas $\dim F = n^2/2$.
Pour montrer qu'il est stable par produit, il suffit de montrer que le produit de deux matrices E_{ij} et E_{kl} de cette famille génératrice est toujours dans F. Et en effet :

- si $j \neq k$ on a $E_{ij}E_{kl} = 0 \in F$;
- si $j = k$ on a $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$ et $i \equiv j \mod 2$ et $j \equiv l \mod 2$ implique $i \equiv l \mod 2$ donc $E_{il} \in F$.

Exercice

Posons $M = (m_{ij})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. On calcule $DM = (\lambda_i m_{ij})$ et $MD = (\lambda_j m_{ij})$ donc M et D commutent si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(\lambda_i - \lambda_j)m_{ij} = 0$, soit $i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0$.
Les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.
Posons maintenant $D' = \operatorname{diag}(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_n)$. par le même calcul on obtient que M commute avec D' si et seulement si pour tout $(i,j) \neq (1,2)$ et $(i,j) \neq (2,1)$, $m_{ij} = 0$. M est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & & & \\ m_{21} & m_{22} & & & \\ & & m_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m_{nn} \end{pmatrix}$$

16 – Déterminants

Vrai/faux

V - V - V - V - F - F - V - V - F - V - V

Calculs

Exercice

On obtient $\Delta_n = n!$.

Exercice

En développant par rapport à la i^e colonne on obtient a_i.
Posons $A = \sum_{j,l} a_{kl}E_{kl}$. Alors $E_{ij}A = \sum_{l} a_{jl}E_{il}$ donc d'après la question précédente, $\det(I_n + E_{ij}A) = a_{ji}$.

Exercice

Posons $B_p = \left(\begin{array}{c|c} O_{p,n} & I_p \\ \hline A & O_{n,p} \end{array}\right)$. En développant par rapport à la première ligne on obtient $\det B_p = (-1)^n \det B_{p-1}$. Sachant que $B_0 = A$ on en déduit que $\det(B_p) = (-1)^{np}\det A$.

Exercice

Pour $n \geqslant 2$ on développe par rapport à la dernière ligne pour obtenir la relation de récurrence $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.
L'équation caractéristique est $\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = (\lambda - a)(\lambda - b)$ et on a $D_0 = 1$, $D_1 = a+b$.

- Si $a \neq b$ on obtient $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$;
- si $a = b$ on obtient $D_n = (n+1)a^n$.

Exercices de révision

Exercice

Si on soustrait la première colonne à toutes les autres, il ne reste plus que des x dans la première colonne. En développant par rapport à cette dernière on obtient une expression affine en x.

Exercice

$u(\mathrm{E}_{ij}) = \mathrm{E}_{ij} + \delta_{i,j}\mathrm{I}_n = \begin{cases} \mathrm{E}_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \mathrm{E}_{ii} + \mathrm{I}_n & \text{si } i = j \end{cases}$ et $u(\mathrm{I}_n) = 2\mathrm{I}_n$. Dans la base (c) la matrice est donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi $\det u = 2$.

Exercice

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{A}$. Alors $\det \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = det(-\mathrm{A}) = (-1)^{2n+1} \det \mathrm{A} = -\det \mathrm{A}$ donc $\det \mathrm{A} = 0$.
Soit $\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & -\mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_n \end{array}\right) \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$. Cette matrice est inversible car ses colonnes sont linéairement indépendantes (plus précisément, $\det \mathrm{A} = 1$).

Exercice

Posons $\mathrm{U} = \sum_k \mathrm{C}_k(\mathrm{M})$. Alors $\mathrm{C}_j(\mathrm{M}') = \mathrm{U} - \mathrm{C}_j(\mathrm{M})$. Le déterminant étant n-linéaire alterné on en déduit :

$$\det \mathrm{M}' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-1} \det(\mathrm{C}_1(\mathrm{M}), \ldots, \mathrm{U}, \ldots, \mathrm{C}_n(\mathrm{M})) + (-1)^n \det(\mathrm{C}_1(\mathrm{M}), \ldots, \mathrm{C}_n(\mathrm{M}))$$

Toujours par n-linéarité, $\det(\mathrm{C}_1(\mathrm{M}), \ldots, \mathrm{U}, \ldots, \mathrm{C}_n(\mathrm{M})) = \det(\mathrm{C}_1(\mathrm{M}), \ldots, \mathrm{C}_j(\mathrm{M}), \ldots, \mathrm{C}_n(\mathrm{M})) = \det \mathrm{M}$ donc

$$\det \mathrm{M}' = n(-1)^{n-1} \det \mathrm{M} + (-1)^n \det \mathrm{M} = (-1)^{n-1}(n-1) \det \mathrm{M}$$

Exercice

$\det \mathrm{A} = (-1)^n \mathrm{P}(0)$ et $\det(\mathrm{A} + x\mathrm{I}_n) = (-1)^n \mathrm{P}(-x)$.

Exercice

L'application $x \mapsto \det(\mathrm{A} + x\mathrm{I}_n)$ est un polynôme de degré n donc il n'e peut admettre qu'un nombre fini de racines. L'intervalle $[0, \epsilon]$ contenant un nombre infini de valeurs, il existe donc $\lambda \in [0, \epsilon]$ tel que $\det(\mathrm{A} + \lambda\mathrm{I}_n) \neq 0$.

17 – Probabilités

Vrai/Faux

F - V - F - F - F - F - F - V - V - V

Calculs

Exercice

$\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = \dfrac{54}{6} = 9$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}_2) = \dfrac{59}{6}$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}_3) == \dfrac{58}{6} = \dfrac{29}{3}$.
On dénombre tous les cas favorables pour obtenir

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 > \mathrm{X}_1) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} > \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_3 > \mathrm{X}_2) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 > \mathrm{X}_3) = \frac{19}{36} > \frac{1}{2}$$

Exercice

$Y(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y=i \mid X=k)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}(Y=i \mid X=k)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k} \times \frac{1}{n}$$

Exercice

$T_1(\Omega) = [\![1,n-1]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $\mathbb{P}(T_1 = k) = \dfrac{\binom{n-k}{1}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

$T_2(\Omega) = [\![2,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $\mathbb{P}(T_2 = k) = \dfrac{\binom{k-1}{1}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$.

Exercices de révision

Exercice

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$, $\mathbb{V}(X) = pq$ et $G_X(t) = pt + q$ avec $q = 1-p$.
Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{V}(X) = npq$ et $G_X(t) = (pt+q)^n$ avec $q = 1-p$.

Exercice

Pour une variable aléatoire X telle que $a \leqslant X \leqslant b$ on a : $-\dfrac{b-a}{2} \leqslant X - \dfrac{a+b}{2} \leqslant \dfrac{b-a}{2}$ donc $\left(X - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$.
En développant on obtient $X^2 \leqslant (a+b)X - ab$. L'espérance étant linéaire et croissante on en déduit : $\mathbb{E}(X^2) \leqslant (a+b)\mathbb{E}(X) - ab = (a+b)m - ab$.
Pour montrer que ce majorant correspond bien au maximum de $\mathbb{E}(X^2)$, il reste à donner un exemple de variable aléatoire pour laquelle $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathbb{E}(X^2) = (a+b)m - ab$.
$m \in [a,b]$ donc il existe $p \in [0,1]$ tel que $m = pa + (1-p)b$. Considérons la variable aléatoire X définie par $X(\Omega) = \{a,b\}$, $\mathbb{P}(X=a) = p$ et $\mathbb{P}(X=b) = 1-p$. On a alors $\mathbb{E}(X) = pa + (1-p)b = m$ et

$$\mathbb{E}(X^2) = pa^2 + (1-p)b^2 = \frac{b-m}{b-a}a^2 + \frac{m-a}{b-a}b^2 = m(a+b) - ab.$$

Exercice

De l'implication : $\left(\forall k \in [\![1,n]\!],\ X_k > a\right) \Rightarrow \left(X_1 + \cdots + X_n > na\right)$ on déduit par croissance des probabilités :

$$\mathbb{P}\Big(X_1 > a \text{ et } \cdots \text{ et } X_n > a\Big) \leqslant \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > na)$$

Les X_k sont indépendantes et de même loi donc ceci s'écrit aussi : $\mathbb{P}(X_1 > a)^n \leqslant \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > na)$.

De l'implication : $\left(X_1 + \cdots + X_n > na\right) \Rightarrow \left(\exists k \in [\![1,n]\!],\ X_k > a\right)$ on déduit cette fois :

$$\mathbb{P}\Big(X_1 + \cdots + X_n > na\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_k (X_k > a)\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_k (X_k \leqslant a)\Big) = 1 - \prod_k \Big(1 - \mathbb{P}(X_k > a)\Big) = 1 - \Big(1 - \mathbb{P}(X_1 > a)\Big)^n$$

On a ainsi prouvé l'encadrement : $\mathbb{P}(X_1 > a)^n \leqslant \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > na) \leqslant 1 - \Big(1 - \mathbb{P}(X_1 > a)\Big)^n$ qui conduit immédiatement à l'équivalence : $\mathbb{P}(X_1 > a) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > na)$.

18 – Espaces euclidiens

Vrai/Faux

V - V - F - F - V - V - V - V - F - F - V - V - V - V - F - V

Exercices de révision

Exercice

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ de $\mathbb{R}^n$ pour obtenir :

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_k})^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{x_k})^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Exercice

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonction $t \mapsto t^n\sqrt{f(t)}$ et $t \mapsto t^p\sqrt{f(t)}$:

$$\int_0^1 t^{n+p} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 t^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^1 t^{2p} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

soit en élevant au carré : $\mathrm{I}_{n+p}^2 \leqslant \mathrm{I}_{2n}\mathrm{I}_{2p}$.

Exercice

On développe : $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\| \Leftrightarrow \|x+\lambda y\|^2 \geqslant \|x\|^2 \Leftrightarrow 2\lambda\langle x \mid y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0$.

- Si $\langle x \mid y\rangle = 0$ on a donc bien pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$.
- Réciproquement, si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$ alors pour tout $\lambda > 0$, $2\langle x \mid y\rangle + \lambda\|y\|^2 \geqslant 0$ et en faisant tendre λ vers 0^+ on obtient $\langle x \mid y\rangle \geqslant 0$.
  Mais pour tout $\lambda < 0$ on a aussi $2\langle x \mid y\rangle + \lambda\|y\|^2 \leqslant 0$, et en faisant tendre λ vers 0^- on obtient cette fois $\langle x \mid y\rangle \leqslant 0$. D'où $\langle x \mid y\rangle = 0$.

Exercice

Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se définit par $\langle \mathrm{A} \mid \mathrm{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{B})$, donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. On a donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Notons p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$. Alors $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = \|p(\mathrm{A})\|$, et $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{\|\mathrm{I}_n\|^2}\langle \mathrm{A} \mid \mathrm{I}_n\rangle \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = \dfrac{1}{\|\mathrm{I}_n\|}\left|\langle \mathrm{A} \mid \mathrm{I}_n\rangle\right| = \dfrac{\left|\mathrm{tr}(\mathrm{A})\right|}{\sqrt{n}}$.

Exercice

P appartient à $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ sans appartenir à $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ donc $\deg \mathrm{P} = n$.

Si on pose $\mathrm{P}(t) = \sum_{k=0} n a_k \mathrm{X}^k$ alors en réduisant au même dénominateur $\mathrm{R}(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+x+1} = \dfrac{\mathrm{Q}(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$ où Q est une expression polynomiale de degré inférieur ou égal à n.
Par ailleurs, P est orthogonal à X^k pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, donc k est racine de R et donc de Q. On en déduit qu'il existe un scalaire λ tel que $\mathrm{Q} = \lambda(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\cdots(\mathrm{X}-n+1)$.
Par unicité de la décomposition en éléments simples on en déduit que

$$a_k = \frac{\mathrm{Q}(-k-1)}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)(1)\cdots(n-k)} = \lambda(-1)^{n-1-k}\frac{(n+k)!}{(k+1)!k!(n-k)!}$$

Les polynômes $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ définis par $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-1-k}\dfrac{(n+k)!}{(k+1)!k!(n-k)!}\mathrm{X}^k$ forment donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

Exercice

$s_\mathrm{F}(x) = 2p_\mathrm{F}(x) - x$ donc $s_\mathrm{F} = 2p_\mathrm{F} - \mathrm{Id}$.

Exercice

Si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(e)}(u) = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors $a_{ij} = \langle e_i \mid u(e_j)\rangle$ car (e) est orthonormée et donc $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\langle e_k \mid u(e_k)\rangle$.

Exercice

Si on applique l'hypothèse à $x+y$ on obtient $\langle u(x+y) \mid x+y\rangle = 0$, soit en développant : $\langle u(x) \mid x\rangle + \langle u(x) \mid y\rangle + \langle u(y) \mid x\rangle + \langle u(y) \mid y\rangle = 0$, et donc $\langle u(x) \mid y\rangle = -\langle x \mid u(y)\rangle$.
Si $x \in \mathrm{Ker}\, u$ et $y = u(z) \in \mathrm{Im}\, u$ alors $\langle x \mid y\rangle = \langle x \mid u(z)\rangle = -\langle u(x) \mid z\rangle = \langle 0_\mathrm{E} \mid z\rangle = 0$ donc $\mathrm{Ker}\, u \subset (\mathrm{Im}\, u)^\perp$. Or $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n - \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)^\perp$, donc $\mathrm{Ker}\, u = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$.