

## Algèbre linéaire

**Exercice 1** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $F_1 + F_2 + \dots + F_n = E$ . Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels  $G_k \subset F_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) tel que  $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n = E$  (procéder par récurrence en commençant par traiter le cas  $n = 2$ ).

**Exercice 2** Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $H_1, \dots, H_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on pose  $\mathcal{H}_k = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im } u \subset H_k\}$ . Montrer que  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n = \mathcal{L}(E)$ . On commencera par traiter le cas  $n = 2$ .

**Exercice 3** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  et  $q$  deux projections vectorielles sur un même sous-espace  $H$ . Montrer que quel que soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $u = \lambda p + (1 - \lambda)q$  est une projection vectorielle sur  $H$ .

**Exercice 4** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ , et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des scalaires. On pose  $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  et  $x'_i = x_i + y$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Étudier à quelle condition la famille  $(x'_1, \dots, x'_n)$  est libre.

**Exercice 5** Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme tel que pour tout  $x \in E$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée. Montrer que  $u$  est une homothétie vectorielle.

**Exercice 6** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice non nulle vérifiant  $\text{tr } M = 0$ .

a) Montrer qu'il existe  $X_1 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $MX_1$  ne soit pas colinéaire à  $X_1$  (utiliser l'exercice précédent).

b) En déduire que  $M$  est semblable à une matrice de la forme

$$N = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & M_1 & \end{array} \right) \quad \text{où } M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ vérifie } \text{tr } M_1 = 0.$$

c) Montrer alors que  $M$  est semblable à une matrice à diagonale nulle.

**Exercice 7** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, et  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que

$$\dim \text{Ker}(u + v) \leq \dim(\text{Ker } u \cap \text{Ker } v) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v).$$

**Indication.** Considérer la restriction  $w$  de  $u$  à  $\text{Ker}(u + v)$ .

**Exercice 8** Quelles sont les droites vectorielles stables par un projecteur? En déduire que si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie impaire et  $p$  et  $q$  deux projections vectorielles alors il existe une droite vectorielle stable à la fois par  $p$  et par  $q$ .

**Exercice 9** Soit  $A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$  et  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $B \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ .

a) Montrer que  $\text{rg}(M) \geq r$ .

b) Montrer que  $\text{rg } M = r$  si et seulement si  $D = CA^{-1}B$ .