Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 (∗)

Étudier les solutions maximales des équations différentielles linéaires suivantes :

$$(1+t)x' + x = 1 + \ln(1+t) \qquad (1-t^2)x' - tx = t^3.$$

Exercice 2 (∗)

Résoudre sur un intervalle adéquat l'équation différentielle suivante : $(\sin t)^3 x' - 2(\cos t)x = 0$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (∗)

Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et continues, telles que u soit impaire et v paire.
Montrer que l'équation différentielle $x' = u(t)x + v(t)$ possède une unique solution impaire.

Exercice 4 (∗∗)

a. Résoudre l'équation $t^2x' + x = t^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

On exprimera les solutions à l'aide de l'application $t \mapsto \displaystyle\int_0^t e^{-1/u}\,du$, après avoir justifié la convergence de cette intégrale.

b. Montrer que l'équation admet une unique solution ayant une limite finie en 0. Quelle est cette limite ?

Exercice 5 (∗∗)

a. Résoudre l'équation différentielle $y' - y = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

On exprimera la solution générale en fonction de $u(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2-t}\,dt$.

b. Démontrer que toutes les solutions tendent vers 0 en $-\infty$ et qu'une seule solution admet une limite finie en $+\infty$. Quelle est cette limite ?

Exercice 6 (∗∗)

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : x' - x = \dfrac{1}{t}$ et ses solutions sur $]0,+\infty[$.

a. D'après le théorème de Cauchy, un point M de coordonnées (t_0, x_0) avec $t_0 > 0$ appartient au graphe $\mathscr{C}_{\mathrm{M}}$ d'une unique solution de $(\mathcal{E})$. Déterminer sans résoudre l'équation différentielle l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M pour lesquels la tangente à $\mathscr{C}_{\mathrm{M}}$ en M est horizontale, et l'ensemble $\mathscr{I}$ des points M qui sont points d'inflexion de $\mathscr{C}_{\mathrm{M}}$ (on admettra que les points d'inflexion sont exactement les points qui annulent la dérivée seconde).

b. Montrer que $\phi_0 : t \mapsto -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{t+s}\,ds$ est solution de $(\mathcal{E})$; comment se situe son graphe vis à vis de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$?

c. Décrire enfin l'allure des différentes solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 7 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(f'(x) + f(x)\big) = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 8 (∗∗∗)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a et b deux réels tels que $a > 0$.

a. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$ il existe un unique $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que $g' + ag = f$ et $g(0) = b$.

b. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors $\lim\limits_{+\infty} g(t) = 0$.

c. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et donner une relation liant $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 (∗∗)

Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et y et z solutions de :

$$y(0) = z(0) \qquad y' = a(t)y + b(t) \qquad z' \leqslant a(t)z + b(t).$$

Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $y(t) \geqslant z(t)$.

Systèmes différentiels du premier ordre

Exercice 10 (∗)

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x + 3y - 2z \\ y' = -3x + 5y - 2z \\ z' = -3x + 4y - z \end{cases}$$

Exercice 11 (∗∗)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}_n$. Résoudre le système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$; on exprimera les solutions en fonction de $\mathrm{X}(0)$ et $\mathrm{AX}(0)$.

Exercice 12 (∗∗)

Résoudre le système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ lorsque A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (∗)

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x + y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + 2y + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Exercice 14 (∗∗)

Soit u un vecteur non nul d'un espace euclidien E de dimension 3. Résoudre l'équation différentielle $x' = u \wedge x$. Quelle est la trajectoire de la courbe paramétrée par $t \mapsto x(t)$?

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 15 (∗)

Chercher une solution développable en série entière de l'équation : $xy'' + 2y' - xy = 0$ puis résoudre complètement cette équation.

Exercice 16 (∗)

Chercher une solution développable en série entière de l'équation : $x(1-x)y'' + (2-5x)y' - y = 0$ puis résoudre complètement cette équation.

Exercice 17 (∗)

Intégrer les équations différentielles suivantes sur des intervalles adéquats :

$$y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)\mathrm{e}^x \qquad y'' - y' - \mathrm{e}^{2x}y = e^{3x} \quad (\text{poser } t = \mathrm{e}^x)$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x \quad (\text{poser } t = \ln x)$$

Exercice 18 (∗∗)

Trouver sur solution particulière non nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle : $t^2x'' + x = 0$, et en déduire l'ensemble des solutions.
Quelles sont les fonctions dérivables $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ qui vérifient : $\forall t > 0,\ f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$?

Exercice 19 (∗∗)

Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(1-x) = f(1+x)$.

Exercice 20 (∗)

a. En faisant le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$ (c'est-à-dire en posant $y(u) = x(\mathrm{e}^u)$) résoudre l'équation différentielle $t^2x'' + tx' - x = 1$ sur $]0,+\infty[$.

b. À l'aide d'un changement de variable analogue, résoudre cette même équation différentielle sur $]-\infty,0[$.

Exercice 21 (∗∗)

Soit q une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. On note x_1 et x_2 deux solutions non identiquement nulles de $x'' + q(t)x = 0$.

a. On suppose que x_1 possède au moins deux zéros, et on en considère deux consécutifs t_1 et t_2. Montrer que :
- ou bien x_2 s'annule sur $]t_1,t_2[$;
- ou bien x_2/x_1 est constant sur $]t_1,t_2[$.

Indication. On pourra considérer le wronskien $\mathrm{W} : t \mapsto x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t)$.

b. En déduire que deux solutions linéairement indépendantes ne peuvent avoir de zéro en commun, et qu'entre deux zéros consécutifs de l'une se trouve exactement un zéro de l'autre.

Exercice 22 (∗∗)

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On considère l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$.

a. Soit y une solution bornée de l'équation. Montrer que y' tend vers 0 en $+\infty$.

b. Soient y_1 et y_2 deux solutions. Montrer que leur wronskien $w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ est constant.

c. En déduire que l'équation admet une solution non bornée.

Exercice 23 (∗∗∗)

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, à valeurs positives, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = \ell > 0$.
On considère une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$, ainsi que la fonction $\psi : x \mapsto \sin(\alpha x + \beta)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On note enfin $\mathrm{W} : x \mapsto \phi(x)\psi'(x) - \psi(x)\phi'(x)$.

a. Calculer $\mathrm{W}'(x)$.

b. Montrer que ϕ admet une infinité de zéros.