Calcul différentiel

Continuité

Exercice 1 (⋆)

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x,y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\qquad f(x,y)=\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\qquad f(x,y)=\frac{x+2y}{x^2-y^2}\qquad f(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{xy^2}.$$

Exercice 2 (⋆)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1\\ -\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x^2+y^2\leqslant 1\end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Calcul différentiel

Exercice 3 (⋆)

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f:x\mapsto\|x\|$. En quels points cette application est-elle différentiable ? Préciser le vecteur gradient en ces points.

Exercice 4 (⋆)

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $f:\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{P})=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa différentielle.

Exercice 5 (⋆)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées partielles, mais que f n'est pourtant pas continue en ce point.

Exercice 6 (⋆)

Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\ \text{si } (x,y)\neq(0,0)\qquad \text{et}\qquad f(0,0)=0$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (⋆⋆)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On définit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par :

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon}\end{cases}$$

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 8 ($\ast$)

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Montrer que f vérifie la relation : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 9 ($\ast\ast$)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

a. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(x+t, y+t) = f(x,y)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

b. On suppose que pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = f(x,y)$. Montrer que $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 10 ($\ast\ast$)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application non nulle de classe $\mathscr{C}^1$.On dit que f est *homogène* s'il existe une application $\phi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$(\ast) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda > 0, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \phi(\lambda) f(x,y).$$

a. Montrer que si f est homogène, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha$.
Indication. Dériver l'égalité $(\ast)$ par rapport aux variables x, y et λ.

b. Montrer alors que f est homogène si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

c. Résoudre cette équation aux dérivées partielles à l'aide des coordonnées polaires.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 11 ($\ast$)

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$.

Exercice 12 ($\ast$)

En utilisant les coordonnées polaires résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x^2 + y^2 = f(x,y).$$

Exercice 13 ($\ast$)

Résoudre sur $\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ l'équation $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y)$ à l'aide des coordonnées polaires.

Exercice 14 ($\ast\ast$)

Résoudre sur $\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\right\}$ l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-y)f(x,y)$ en posant $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$.

Exercice 15 (∗)

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ en posant $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$.

Exercice 16 (∗)

Étant donné $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ on considère l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

où la fonction f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

a. Transformer l'équation par le changement de variables $u=x+\alpha y$ et $v=x+\beta y$.

b. Lorsque $b^2-4ac>0$ montrer qu'on peut intégrer l'équation.

Exercice 17 (∗∗)

Résoudre sur un ouvert adéquat l'équation $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ en posant $\begin{cases} u=xy \\ v=x/y \end{cases}$.

Exercice 18 (∗∗)

On appelle *laplacien* de f la quantité $\Delta f(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$. Calculer-le en coordonnées polaires. Quels sont les fonctions *harmoniques* (c'est-à-dire vérifiant $\Delta f=0$) et *isotropes* (ne dépendant pas de l'angle θ) ?

Extremums d'une fonction

Exercice 19 (∗)

Déterminer les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

$$(x,y)\mapsto x^3+y^3-3xy \qquad (x,y)\mapsto(x-y)e^{xy} \qquad (x,y)\mapsto x^4y^3+\ln(1+y^4)$$

Exercice 20 (∗)

Déterminer la valeur maximale sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]^2$ de $f:(x,y)\longmapsto \sin x\sin y\sin(x+y)$.

Exercice 21 (∗)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+x^2y+y^3$.

a. Montrer que f admet un point critique qui n'est pas un extremum local.

b. Soit $\mathcal{K}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\leqslant 1\right\}$. Déterminer les extremums de f sur $\mathcal{K}$.

Exercice 22 (∗)

a. Soient x, y et z trois nombres réels positifs. Montrer qu'il est possible de construire un triangle dont les côtés sont de longueurs respectives x, y et z si et seulement si :

$$x<y+z,\qquad y<z+x,\quad \text{et}\quad z<x+y.$$

b. Un triangle variable a un périmètre p imposé, ses côtés ont pour longueur x, y et z.
On pose $F(x,y,z)=(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$. Déterminer le triangle pour lequel $F(x,y,z)$ est minimal, et donner la valeur de ce minimum.

Exercice 23 ($\ast\ast$)

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un vecteur non nul de E. Déterminer les extremums locaux de la fonction $f : x \mapsto \|x\|^4 - \langle x \mid u \rangle$.

Exercice 24 ($\ast\ast\ast$)

Déterminer le périmètre maximal d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon R.