Espaces vectoriels normés

Normes

Exercice 1 (⋆)

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\| = \sup\left\{\left|P'(t) - P(t)\right| \,\middle|\, t \in [0,1]\right\}$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}[X]$. S'agit-il d'une norme sur l'espace $\mathscr{C}^1([0,1] \to \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$?

Exercice 2 (⋆)

Montrer que $N : (x,y) \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner la sphère unité.

Exercice 3 (⋆)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$ on note $\overline{B}(a,r)$ la boule fermée de centre a de rayon r. Prouver les implications suivantes :

a. $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,s) \Longrightarrow \|a-b\| \leqslant s - r$;

b. $\mathring{B}(a,r) \cap \mathring{B}(b,s) = \varnothing \Longrightarrow \|a-b\| \geqslant r + s$.

Exercice 4 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel réel, et $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
- pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0_E$;
- l'ensemble $B = \left\{x \in E \,\middle|\, N(x) \leqslant 1\right\}$ est convexe.

Montrer que N est une norme.

Exercice 5 (⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$ on note $\mathring{B}(a,r)$ la boule ouverte de centre a de rayon r. Prouver l'implication suivante : $\mathring{B}(a,r) = \mathring{B}(b,s) \Longrightarrow a = b$ et $r = s$.

Exercice 6 (⋆)

On définit pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ les quantités $N_1(P) = \sup\left\{\left|P(t)\right|,\ t \in [-1,1]\right\}$ et $N_2(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$.

a. Justifier que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \dfrac{X^n}{n}$.Étudier la convergence de la suite (P_n) pour les normes N_1 et N_2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7 (⋆)

On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour tout $(u_n) \in E$ on pose $N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(|u_n| + |u_{2n}|\right)$.

Montrer que N est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Topologie d'un espace vectoriel normé

Exercice 8 (∗)

Soient A et B deux parties d'un même espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \widehat{A \cup B}^{\circ}, \qquad \mathring{A} \cap \mathring{B} = \widehat{A \cap B}^{\circ}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 9 (∗)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \setminus A)$.

Exercice 10 (∗)

Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont E et ∅.

Exercice 11 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

a. Montrer que le seul sous-espace vectoriel ouvert de E est E lui-même.

b. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{O}) = E$.

Exercice 12 (∗)

Justifier que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (∗∗)

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

a. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

b. Montrer que $\mathring{A}$ est convexe.

Limite et continuité

Exercice 14 (∗)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite de matrices $U_n = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $I - A$ est inversible et que $B = (I - A)^{-1}$.

Exercice 15 (∗∗)

Montrer que toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles.
Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 16 (∗)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$:

a. tout d'abord en supposant A inversible ;

b. puis dans le cas général (utiliser le résultat de l'exercice précédent).

Exercice 17 (∗)

On considère deux réels $(p, q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = px + q$ et les deux demi-plans

$$\mathcal{P}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < px + q\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > px + q\right\}$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue telle que $f(a) \in \mathcal{P}_1$ et $f(b) \in \mathcal{P}_2$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) \in \mathcal{D}$.

Exercice 18 (∗∗)

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il toujours une application continue $\phi : [0,1] \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi(0) = A$ et $\phi(1) = B$?

Exercice 19 (∗∗)

Soit C une partir convexe d'un espace vectoriel normé E, et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient a et b deux points de C, et y un réel vérifiant : $f(a) < y < f(b)$. Montrer qu'il existe $x \in C$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 20 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon r.

a. Montrer qu'il existe deux points A et B diamétralement opposés de $\mathcal{C}$ tels que $f(A) = f(B)$.

b. Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour, tels que $f(C) = f(D)$.

Exercice 21 (∗∗)

Soit A une partie non vide de E, et $x \in E$. On pose $d(x, A) = \inf\left\{\|x - a\| \;\middle|\; a \in A\right\}$.
Justifier que si A est fermé et borné, il existe pour tout $x \in E$ un point $a_0 \in A$ tel que $\|x - a_0\| = d(x, A)$, puis montrer que cette propriété reste vraie lorsqu'on suppose uniquement A fermé.

Exercice 22 (∗∗)

Soit A une partie non vide de E, et $x \in E$. On pose $d(x, A) = \inf\left\{\|x - a\| \;\middle|\; a \in A\right\}$.

a. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est une application continue.

b. Soient A et B deux parties fermées d'un même espace vectoriel normé E tels que $A \cap B = \varnothing$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

Exercice 23 (∗)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et A une partie fermée et bornée de E. Montrer l'existence de $(a, b) \in A^2$ tels que pour tout $(x, y) \in A^2$, $\|x - y\| \leqslant \|a - b\|$.

Dérivabilité

Exercice 24 (∗)

Soit E un espace euclidien et $f : I \to \mathbb{E}$ une fonction deux fois dérivable, telle que la fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ soit constante.
Montrer que pour tout $t \in I$, $\langle f(t) \mid f''(t)\rangle \leqslant 0$.

Exercice 25 (∗)

On considère une fonction vectorielle $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que pour tout $t \in I$, la matrice $A(t)$ soit inversible.
On peut donc définir la fonction $f : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant : $\forall t \in I$, $f(t) = A(t)^{-1}$.
On admet que f est de classe $\mathscr{C}^1$; calculer $f'(t)$ pour $t \in I$.

Exercice 26 (∗)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\det\big(f(a), f(b), f'(c)\big) = 0$.

Exercice 27 ($\ast$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant :

$$\mathrm{D}_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Justifier que D_n est une fonction dérivable et calculer $\mathrm{D}_n'(x)$. En déduire l'expression de $\mathrm{D}_n(x)$.