Espaces euclidiens

Produit scalaire

Exercice 1 (∗)

Soit E un espace euclidien, $a \in \mathrm{E}$ tel que $\|a\| = 1$, et $k \in \mathbb{R}$. On définit $\phi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \phi(x,y) = \langle x \mid y \rangle + k\langle x \mid a \rangle \langle y \mid a \rangle.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante ϕ est-il un produit scalaire ?

Exercice 2 (∗∗)

Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable.

On définit la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{A}_{ij} = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f_i(t) g_i(t)\, \mathrm{d}t$.

Montrer que l'application $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 3 (∗)

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Prouver que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Dans quel cas y-a-t'il égalité ?

Exercice 4 (∗∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\, \mathrm{d}t \leqslant 4 \int_0^1 t^2 f'(t)^2\, \mathrm{d}t$.

Projection orthogonale

Exercice 5 (∗)

On considère un espace euclidien E de dimension 3 muni d'une base orthonormée (e). On note P le plan d'équation : $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ dans cette base, p la projection orthogonale sur P, et v le vecteur de coordonnées (x,y,z) dans la base (e). Déterminer une base orthonormée (e'_1, e'_2) de P, en déduire l'expression du vecteur $p(v)$ dans la base (e), puis la matrice associée à p dans la base (e).

Exercice 6 (∗)

On considère un espace euclidien E de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. Déterminer la matrice associée dans la base (e) à la projection vectorielle sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 7 (∗)

Montrer que l'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, et utiliser cette remarque pour calculer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^k - at - b)^2\, \mathrm{d}t$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

Exercice 8 (∗)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle \mathrm{M} \mid \mathrm{N} \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{N})$, on pose $\mathrm{H} = \left\{ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0 \right\}$, et on note J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

Exercice 9 (∗)

Soit p une projection d'un espace euclidien E ; montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale si et seulement si pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$.

Exercice 10 (∗∗)

Soit p une projection vectorielle d'un espace euclidien E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x \in \mathrm{E}, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 11 (∗∗∗)

On munit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ du produit scalaire $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, et on note $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$.

a. Calculer $\mathrm{P}_k(0)^2$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. On note $\mathrm{H} = \left\{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \,\middle|\, \mathrm{P}(0) = 0\right\}$. Quelle est la dimension de H ? Déterminer une base de $\mathrm{H}^\perp$ à l'aide des $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n$.

c. Déterminer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2\,\mathrm{d}t \,\middle|\, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Espaces euclidiens

Exercice 12 (∗)

Soit E un espace eucldien, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle x \mid u(x) \rangle = 0$. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 13 (∗∗)

Soit E un espace euclidien de dimension n. À $(x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{E}^p$ on associe le *déterminant de Gram* :

$$\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) = \det\big(\langle x_i \mid x_j \rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}.$$

Montrer que $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) = \det(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A})$, où $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_p)$ et (e) une base orthonormée quelconque de E. En déduire que $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_p) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée.

Exercice 14 (∗∗)

Soient (e) et (f) deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que la quantité $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i \mid u(e_j) \rangle^2$ ne dépend pas de (e) et (f).

Exercice 15 (∗∗)

Soit E un espace euclidien de dimension n, et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs tels que pour tout $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| = 1$. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Exercice 16 (∗∗)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \|u_i - u_j\| = 1$.

a. Montrer que ces conditions sont équivalentes à : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \implies \langle u_i \mid u_j \rangle = 1/2$.

b. Conclure en raisonnant par récurrence.

Exercice 17 (∗∗∗)

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Une famille de p vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque $i \neq j \implies \langle x_i \mid x_j \rangle < 0$. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que $p \leqslant n + 1$.

Exercice 18 (⁎⁎)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note Q_n le polynôme $\dfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

a. Exprimer le degré et le coefficient dominant de Q_n, et déterminer les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

b. On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis que pour tout $n \geqslant 1$, Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c. Calculer $\|Q_n\|$.

d. Exprimer à l'aide de la famille (Q_n) la famille obtenue lorsqu'on applique la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19 (⁎⁎⁎)

Soit E un espace euclidien de dimension n, $(u_1,\dots,u_n)$ une base de E, et $(e_1,\dots,e_n)$ la base orthonormée obtenue par le procédé de Schmidt à partir de $(u_1,\dots,u_n)$. On note $R = \mathrm{Mat}_e(u_1,\dots,u_n)$ la matrice des composantes dans la base (e) de la famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_n)$.

a. Justifier l'affirmation : « R est une matrice triangulaire supérieure », et en déduire que $|\det R| \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|u_i\|$.

On considère maintenant une matrice inversible $A = (a_{ij}) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

b. Démontrer l'existence d'une matrice orthogonale Q et d'une matrice triangulaire supérieure R vérifiant : A = QR.

c. En déduire que si les coefficients de A vérifient : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{ij}| \leqslant 1$, alors $|\det A| \leqslant n^{n/2}$. Peut-on avoir égalité ?

Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice 20 (⁎)

Soit E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$. On considère $u : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \lambda\langle x \mid a\rangle a \end{pmatrix}$.

À quelle condition a-t-on $u \in \mathcal{O}(E)$? Dans ce cas, décrire u.

Exercice 21 (⁎)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle M \mid N\rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$.
Soit $A \in E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(M) = AM$. À quelle condition u est-il une isométrie vectorielle de E ?

Exercice 22 (⁎)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, (e) une base orthonormée d'un espace euclidien E, et $u \in \mathcal{O}(E)$ défini par : $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. Justifier que $a_{ij} = \langle e_i \mid u(e_j)\rangle$, et en déduire que : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Exercice 23 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie vectorielle. On pose $v = u - \mathrm{Id}$.
Montrer que $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, v)^{\perp}$.

En déduire que la suite $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$ converge vers p, projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\, v$.

Exercice 24 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x \mid y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x) \mid u(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle $v \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = \lambda v$.

Exercice 25 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien. On considère des vecteurs $u_1,\dots,u_n$ et $v_1,\dots,v_n$ de E tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle u_i \mid u_j\rangle = \langle v_i \mid v_j\rangle$, et le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une isométrie vectorielle $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(u_i) = v_i$.

a. Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une base de E.

b. Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une famille génératrice de E.

c. Traiter l'exercice dans le cas général.

Exercice 26 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien et u et v deux endomorphismes symétriques qui commutent : $u \circ v = v \circ u$.
Soit λ une valeur propre de u, et E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par v, et que la restriction de v à E_λ est un endomorphisme symétrique de E_λ.
En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ et $\mathrm{Mat}_e(v)$ soient diagonales.

Exercice 27 (⋆⋆)

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Montrer que si p est impair il existe un unique endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$.

Exercice 28 (⋆⋆)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+$, et $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $|\mathrm{tr}(\mathrm{AU})| \leqslant \mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 29 (⋆⋆⋆)

Soit A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

a. Montrer que $\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{Y}\rangle = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{AY}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b. En appliquant la méthode de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer l'existence d'une matrice triangulaire supérieure M telle que $\mathrm{A} = \mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M}$.

c. En déduire que $\det \mathrm{A} \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^n a_{kk}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 30 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ un endomorphisme symétrique tel que $\mathrm{tr}\, u = 0$.

a. Montrer l'existence d'un vecteur non nul $x \in \mathrm{E}$ tel que $\langle u(x) \mid x\rangle = 0$.

b. En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\langle u(e_i) \mid e_i\rangle = 0$. Que dire de la matrice associée à u dans la base (e) ?

Exercice 31 (⋆)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant : $\mathrm{A}^\mathrm{T} = -\mathrm{A}$.
Montrer que Im A et Ker A sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et en déduire que rg(A) est un entier pair.