Probabilités

Dénombrement

Exercice 1 (⋆)

Soit E un ensemble de cardinal n, et A une partie de E à p éléments. Dénombrer les parties X de E vérifiant :

a. $A \cap X = \varnothing$;

b. $A \cup X = A$;

c. $A \cap X = A$;

d. $A \cup X = E$.

Exercice 2 (⋆)

Soit E un ensemble de cardinal n.

a. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.

b. En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \varnothing$.

c. En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E deux-à-deux disjointes telles que $A \cup B \cup C = E$.

d. Généraliser la formule précédente à un nombre p de parties de E.

Exercice 3 (⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.
Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, et en déduire l'expression de u_n.

Exercice 4 (⋆⋆)

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

a. Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.

b. Pour $n \geqslant 3$ on suppose $p < n$ et on considère un élément a de E.

En observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, établir la relation :

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p\right).$$

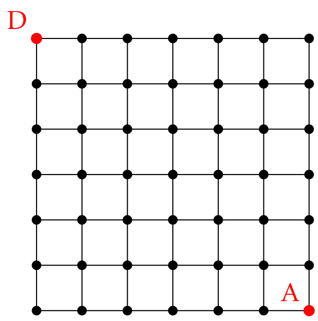
c. En déduire que $S_n^p = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$. Quelle formule obtient-on en prenant $n = p$?

Exercice 5 (⋆⋆)

Soit E un ensemble à np éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.

Exercice 6 (⋆)

On considère une grille carrée de taille $n \times n$, sur laquelle on ne peut se déplacer que d'une unité à la fois, et ce uniquement de la gauche vers la droite ou de haut en bas. Combien y-a-t-il de chemins reliant le point D au point A ?



Exercice 7 ($\ast\ast\ast$)

Montrer que le nombre de façons de placer p boules indiscernables dans q urnes discernables est égal à $\binom{p+q-1}{q-1}$.

Exercice 8 ($\ast\ast$)

a. Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_p \leqslant n$?

b. Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_p \leqslant n$?

Indication : utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 9 ($\ast$)

À l'occasion de la coupe de France on organise un tirage au sort entre n équipes de football de 1^{re} division et n équipes de 2^{e} division (chaque équipe joue un seul match).

a. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de première division à une équipe de seconde division.

b. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

Espaces probabilisés

Exercice 10 ($\ast$)

Soit $\mathscr{A}$ une tribu de $[0,1]$ contenant tous les segments $[a,b]$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

a. Montrer que $\mathscr{A}$ contient tous les intervalles ouverts $]a,b[$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, ainsi que tous les singletons $\{\alpha\}$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

b. On suppose que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $([0,1],\mathscr{A})$ vérifiant : $\mathbb{P}([a,b]) = b-a$ pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Calculer $\mathbb{P}(]a,b[)$ et $\mathbb{P}(\{\alpha\})$.

Exercice 11 ($\ast$)

Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace probabilisé, et (A_n) une suite d'événements. Traduire en notations ensemblistes les événements suivants :

a. l'un au moins des événements A_n est réalisé ;

b. tous les événements A_n sont réalisés ;

c. il existe un rang à partir duquel tous les événements A_n sont réalisés ;

d. une infinité d'événements parmi les A_n sont réalisés ;

e. seul un nombre fini d'événements A_n sont réalisés ;

f. une infinité d'événements parmi les A_n ne sont pas réalisés.

Exercice 12 ($\ast\ast$)

Soit (A_n) une suite d'événements d'un même espace probabilisé.

a. Montrer que les ensembles suivants sont des événements :

- $\mathrm{A} =$ « à partir d'un certain rang tous les A_n sont réalisés » ;
- $\mathrm{B} =$ « il y a une infinité d'événements parmi les A_n qui sont réalisés » ;
- $\mathrm{C} =$ « il n'y a jamais deux événements consécutifs réalisés ».

b. On suppose les événements A_n mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{A})$, $\mathbb{P}(\mathrm{B})$ et montrer sans la calculer que $0 < \mathbb{P}(\mathrm{C}) < 1$.

Exercice 13 (⋆⋆⋆)

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

a. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\geqslant 1-\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)\right)$.

b. On suppose la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ divergente. Que dire de l'événement $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n$?

c. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue une succession infinie de tirages. Après chaque tirage on remet la boule tirée et on en ajoute une rouge. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins une fois la boule noire ?

d. Quelle est la probabilité que la boule noire soit tirée une infinité de fois ?

Exercice 14 (⋆)

a. Vérifier qu'on définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\})=\dfrac{1}{2^n}$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on note A_k l'événement : « n est un multiple de k ».

b. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

c. Calculer $\mathbb{P}(A_2\cup A_3)$.

d. On note B l'événement « n est un nombre premier ». Montrer que $\dfrac{13}{32}<\mathbb{P}(B)<\dfrac{34}{63}$.

Conditionnement et indépendance

Exercice 15 (⋆)

a. Une urne contient p boules rouges et q boules vertes. On tire sans remise les boules, et on s'arrête lorsqu'on a tiré toutes les boules vertes. Déterminer la probabilité d'avoir retiré toutes les boules.

b. Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire les boules deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide. Déterminer la probabilité de tirer à chaque étape une boule rouge et une boule blanche.

Exercice 16 (⋆)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire dans cette urne une boule, puis on la remet accompagnées de deux autres boules de la même couleur. On répète ensuite cette opération indéfiniment.

a. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient blanches ?

b. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules blanches ?

Exercice 17 (⋆⋆)

Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé, et $(A,B)\in\mathscr{A}^2$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A\cap B)\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B})=\mathbb{P}(A\cap\overline{B})\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)$$

Exercice 18 (⋆)

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A,B)\in\mathscr{A}^2$.

a. Montrer que $\mathbb{P}(A\cap B)^2\leqslant\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

b. Si $\mathbb{P}(A)>0$, montrer que $\mathbb{P}(A\cap B\mid A\cup B)\leqslant\mathbb{P}(A\cap B\mid A)$.

c. Si $\mathbb{P}(A)>0$ et $\mathbb{P}(B)>0$, montrer que $\mathbb{P}(A)<\mathbb{P}(A\mid B)\Longrightarrow\mathbb{P}(B)<\mathbb{P}(B\mid A)$.

Exercice 19 (∗)

On considère deux urnes U_1, contenant n_1 boules noires et b_1 boules blanches, et U_2, contenant n_2 boules noires et b_2 boules blanches. On choisit de façon équiprobable l'une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs avec remise. Soit N_1 l'événement « tirer une boule noire au premier tirage » et N_2 l'événement « tirer une boule noire au second tirage ».

a. Quelle est la probabilité de N_1 ? de N_2 ? de $N_1 \cap N_2$?

b. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 20 (∗)

Alice porte le gène de l'hémophilie avec une probabilité de 0,5. Si elle est porteuse, chacun de ses fils aura une chance sur deux de souffrir de cette maladie. Sachant qu'Alice a eu trois fils et qu'aucun n'est hémophile, quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse du gène ? Et s'il nait un quatrième fils, avec quelle probabilité sera-t-il hémophile ?

Exercice 21 (∗)

Un sac contient 100 dés dont 25 sont pipés. Un dé pipé a une chance sur deux de donner le chiffre 6.

a. On prend un dé au hasard et on le lance. On obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b. On prend un dé au hasard et on le lance n fois. On obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

Exercice 22 (∗)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, \dots, U_n$, l'urne U_k contenant k boules blanches et $n-k$ boules noires.

a. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

b. On choisit une urne au hasard et on tire une boule. Celle-ci est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne U_k ?

c. On choisit une urne au hasard et on tire successivement avec remise deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

d. On suppose $n \geqslant 2$. On choisit une urne au hasard et on tire successivement sans remise deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

Exercice 23 (∗)

Une puce se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse $a \in [\![0, N]\!]$. À chaque instant elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité $p \in]0, 1/2[$ ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1-p$. Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités de l'intervalle 0 ou N.
On note u_a la probabilité pour que la puce, partant de a, s'arrête en 0.

a. Que vaut u_0 ? u_N ?

b. Lorsque $0 < a < N$, exprimer u_a en fonction de u_{a-1} et u_{a+1}.

c. En déduire l'expression générale de u_a.

d. Calculer la probabilité v_a pour que la puce, partant de a, s 'arrête en N.

e. Calculer $u_a + v_a$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 24 (⁎⁎)

Pour $s>1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{P}\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour quelle valeur de λ l'application P détermine-t-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\mathbb{N}^*))$? On suppose désormais cette valeur choisie.

b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on considère l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.

c. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est indépendante.

d. En calculant de deux manière $\mathbb{P}(\{1\})$ en déduire que $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$, où $\displaystyle\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

Exercice 25 (⁎⁎)

Alice et Bob jouent des parties indépendantes numérotées $1, 2, \ldots$. La probabilité qu'Alice gagne est égale à p et celle que Bob gagne à $q = 1-p$.
On note a_{2n} la probabilité qu'il y ait égalité à la date $2n$, et b_{2n} la probabilité que la première égalité ait lieu à la date $2n$.
On pose $\displaystyle A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ et $\displaystyle B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n}x^{2n}$.

a. Exprimer a_{2n} en fonction de n.

b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $A(x)$.

c. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1$.

d. Établir une identité vérifiée par A et B, puis expliciter $B(x)$.

e. En admettant que B soit définie et continue en 1, déterminer la probabilité qu'il n'y ait jamais égalité.

Variables aléatoires

Exercice 26 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie $\mathbb{P}(X = j \text{ et } Y = k) = a\dfrac{j+k}{2^{j+k}}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer la valeur de a.

b. Reconnaître les lois marginales de X et Y.

c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 27 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 28 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 29 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2.
Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 30 (∗)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique. Trouver la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ soit nilpotente.

Exercice 31 (∗)

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, et N une variable aléatoire indépendante des X_i et suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Exercice 32 (∗∗)

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. On suppose que les variables X et $f(X)$ sont indépendantes. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(f(X) = n) = 1$.

Espérance et variance

Exercice 33 (∗∗)

On considère un jeu de Pile ou Face infini avec une pièce possédant la probabilité $p = \dfrac{2}{3}$ de tomber sur Face, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face consécutifs pour la première fois. Pour $n \geqslant 1$ on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

a. Calculer p_1 et p_2.

b. Pour $n \geqslant 3$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1} et p_{n-2}, et en déduire l'expression de p_n.

c. Calculer enfin $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 34 (∗)

Un joueur joue à une partie et gagne avec une probabilité p dans $]0,1[$. On note L_1 la longueur de la première liste de parties toutes gagnées ou toutes perdues et L_2 la longueur de la deuxième liste.
Par exemple, pour la séquence suivante : GGGPPG on a $L_1 = 3$ et $L_2 = 2$.

a. Déterminer la loi de L_1 et son espérance.

b. Déterminer la loi de L_2 et son espérance.

c. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 35 (∗)

On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

a. Que vaut $\mathbb{P}(X \geqslant k)$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X)}{N}$.

Exercice 36 (∗∗)

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ on note T_m la variable aléatoire du m^e succès, autrement dit $T_m = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_1 + \cdots + X_k = m\right\}$.
Déterminer la loi et l'espérance de T_m.

Exercice 37 (∗)

a. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

b. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Exercice 38 (∗∗)

On dispose de k dés équilibrés. On les lance et on ne garde que ceux qui n'ont pas amené un 6. On recommence avec les dés restants jusqu'à ce qu'ils soient tous retirés.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qui seront effectués. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant n)$, et en déduire $\mathbb{P}(X = n)$.

b. Déterminer l'espérance de X lorsque $k = 2$.

Exercice 39 (∗∗)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, indépendantes et de même loi.
On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1 + X_2}$.

a. Montrer que Y_1 admet une espérance, puis la calculer.

b. Montrer que Y_1 admet une variance, puis exprimer la covariance de Y_1 et Y_2 en fonction de celle-ci.

Exercice 40 (∗∗)

Soit X une variable aléatoire bornée, et X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
On suppose que X_1X_2 suit la même loi que X^2. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 41 (∗∗∗)

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$, $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, $\alpha_n = \mathbb{E}(Y_n)$ et $\beta_n = \mathbb{E}(Z_n)$.

a. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.

b. Exprimer α_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent de β_n.

Exercice 42 (∗∗)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$.
On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ et on considère $\epsilon > 0$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = (\operatorname{ch} t)^n$.

b. Montrer que pour tout $t > 0$, $\operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}$.

c. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\epsilon\right)$.

d. En déduire que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp(-n\epsilon^2/2)$.

Exercice 43 (∗∗∗)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et réelles admettant un moment d'ordre 2.

a. On suppose $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(Y^2) > 0$, et on pose $Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Lipschitz à Y et Z, Montrer que $\mathbb{P}(Y > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$.

b. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(X - \mathbb{E}(X) < \epsilon\right) \geqslant \dfrac{\epsilon^2}{\mathbb{V}(X) + \epsilon^2}$, puis l'inégalité de Cantelli :

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \epsilon^2}$$

Exercice 44 (⁎⁎)

On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) *converge en probabilité* vers une variable aléatoire X lorsque pour tout $\epsilon > 0$, $\lim \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0$.

a. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, un réel m et une suite de variables aléatoires (X_n) possédant toutes un moment d'ordre 2 et telle que :

- La suite $(\mathbb{E}(X_n))$ converge vers m ;
- La suite $(\mathbb{V}(X_n))$ converge vers 0.

Montrer que (X_n) converge en probabilité vers $X = m$;

b. Soit S_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On pose $Y_n = \exp(S_n/n)$. Montrer que (Y_n) converge en probabilité vers $Y = \exp(p)$.

Séries génératrice

Exercice 45 (⁎)

Soient $p \in]0,1[$ et $r \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(r)$. On définit une nouvelle variable aléatoire U en posant $U = 0$ si $X = 0$ et $U = Y$ si $X = 1$.
Déterminer la série génératrice de U et en déduire $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$.

Exercice 46 (⁎)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k$ avec $a > 0$ et $p \in]0,1[$.

a. Calculer la fonction génératrice G_X de X et en déduire la valeur de a.

b. Calculer espérance et variance de X.

Exercice 47 (⁎⁎⁎)

On considère deux variables aléatoires entières N et X, ainsi qu'une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

a. Montrer que les séries génératrices de X, N et Y vérifient la relation : $G_Y = G_N \circ G_X$.

b. En déduire que si N et X admettent une espérance, il en est de même de Y, et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ (formule de Wald).