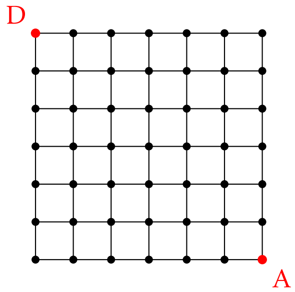
Probabilités

Dénombrement

Exercice 1 (⋆)

On considère une grille carrée de taille $n \times n$, sur laquelle on ne peut se déplacer que d'une unité à la fois, et ce uniquement de la gauche vers la droite ou de haut en bas. Combien y-a-t-il de chemins reliant le point D au point A ?



Exercice 2 (⋆)

a. Combien y a-t-il de couples (x,y) de $[\![1,n]\!]^2$ pour lesquels $x<y$?

b. Combien y a-t-il de couples (x,y) de $[\![1,n]\!] \times [\![1,2n]\!]$ pour lesquels $x<y$?

Exercice 3 (⋆)

Soit E un ensemble de cardinal n.

a. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$.

b. En déduire le nombre de triplets $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$ de parties de E deux-à-deux disjointes telles que $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{E}$.

c. Généraliser la formule précédente à un nombre p de parties de E.

Exercice 4 (⋆⋆)

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

a. Donner les valeurs de S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p>n$.

b. Déterminer les valeurs de S_n^2 et de S_{n+1}^2.

c. Pour $n \geqslant 3$ on suppose $p \leqslant n$ et on considère un élément a de E.

En observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $\mathrm{E}\setminus\{a\}$ sur F, établir la relation :

$$\mathrm{S}_n^p = p\left(\mathrm{S}_{n-1}^{p-1}+\mathrm{S}_{n-1}^p\right).$$

d. En déduire que $\mathrm{S}_n^p = (-1)^p \displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$.

Exercice 5 (⋆)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note u_n le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.
Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$, et en déduire l'expression de u_n.

Exercice 6 (⋆⋆)

Soit E un ensemble à np éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.

Exercice 7 (∗∗)

a. Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_p \leqslant n$?

b. Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_p \leqslant n$?

Espaces probabilisés

Exercice 8 (∗)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable, et (A_n) une suite d'événements. Traduire en notations ensemblistes les événements suivants :

a. l'un au moins des événements A_n est réalisé ;

b. tous les événements A_n sont réalisés ;

c. il existe un rang à partir duquel tous les événements A_n sont réalisés ;

d. une infinité d'événements parmi les A_n sont réalisés ;

e. seul un nombre fini d'événements A_n sont réalisés ;

f. une infinité d'événements parmi les A_n ne sont pas réalisés.

Exercice 9 (∗∗)

Soit (A_n) une suite d'événements d'un même espace probabilisé.

a. Montrer que l'ensemble décrit ci-dessous est un événement :

$$B = \text{« il n'y a jamais deux événements consécutifs réalisés »}.$$

b. On suppose les événements A_n mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Montrer que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$.

Exercice 10 (∗)

Soit (A_n) une suite d'événements presque sûrs d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que l'événement $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est presque sûr.

Exercice 11 (∗∗)

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geqslant 1 - \exp\Big(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\Big)$.

b. On suppose la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ divergente. Que dire de l'événement $\displaystyle\bigcup_{n\geqslant 1} A_n$?

c. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue une succession infinie de tirages. Après chaque tirage on remet la boule tirée et on en ajoute une rouge. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins une fois la boule noire ?

d. Quelle est la probabilité que la boule noire soit tirée une infinité de fois ?

Exercice 12 (∗)

Soit $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ telle que $\mathbb{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k ?

Conditionnement et indépendance

Exercice 13 (∗)

On considère $p+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_p$ en supposant que pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $p-k$ boules noires. L'expérience consiste à choisir aléatoirement une urne puis à effectuer un certain nombre de tirages avec remise dans cette urne.

a. Déterminer la probabilité de l'événement A_n défini par : « les n premiers tirages ont donné des boules blanches ».

b. Exprimer $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)$.

Exercice 14 (∗)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire dans cette urne une boule, puis on la remet accompagnées de deux autres boules de la même couleur. On répète ensuite cette opération indéfiniment.

a. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient blanches ?

b. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules blanches ?

Exercice 15 (∗)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A,B) \in \mathscr{A}^2$.

a. Si $\mathbb{P}(A) > 0$, montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A \cap B \mid A)$.

b. Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, montrer que $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \mid B) \Longrightarrow \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B \mid A)$.

Exercice 16 (∗∗)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et $(A,B) \in \mathscr{A}^2$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Exercice 17 (∗)

On considère deux urnes U_1, contenant n_1 boules noires et b_1 boules blanches, et U_2, contenant n_2 boules noires et b_2 boules blanches. On choisit de façon équiprobable l'une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs avec remise. Soit N_1 l'événement « tirer une boule noire au premier tirage » et N_2 l'événement « tirer une boule noire au second tirage ».

a. Quelle est la probabilité de N_1 ? de N_2 ? de $N_1 \cap N_2$?

b. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 18 (∗)

Un sac contient 100 dés dont 25 sont pipés. Un dé pipé a une chance sur deux de donner le chiffre 6.

a. On prend un dé au hasard et on le lance. On obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b. On prend un dé au hasard et on le lance n fois. On obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 19 (∗)

Une puce se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse $a \in [\![0,N]\!]$. À chaque instant elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité $p \in \,]0,1/2[$ ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1-p$. Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités de l'intervalle 0 ou N. On note u_a la probabilité pour que la puce, partant de a, s'arrête en 0.

a. Que vaut u_0 ? u_N ?

b. Lorsque $0 < a < N$, exprimer u_a en fonction de u_{a-1} et u_{a+1} et en déduire l'expression générale de u_a.

c. Calculer la probabilité v_a pour que la puce, partant de a, s'arrête en N.

d. Calculer $u_a + v_a$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 20 (⁎⁎)

Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{P}\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour quelle valeur de λ $\mathbb{P}$ définit-on ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$? On suppose désormais cette valeur choisie.

b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on considère l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.

c. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est indépendante.

d. En calculant de deux manière $\mathbb{P}(\{1\})$ en déduire que $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$, où $\displaystyle\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Exercice 21 (⁎⁎)

On considère une marche aléatoire uni-dimensionnelle sur un axe indexé par $\mathbb{Z}$. À l'instant initial une particule se trouve en position 0 ; chaque seconde voit celle-ci se déplacer vers la droite avec une probabilité $p \in]0,1[$ et vers la gauche avec une probabilité $q = 1 - p$.

On note $X_n \in \mathbb{Z}$ la position de la particule à la date n et $T \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ la date du premier retour à l'origine.

On pose enfin $a_n = \mathbb{P}(X_{2n} = 0)$ et $b_n = \mathbb{P}(T = 2n)$ et on considère les séries entières $\displaystyle A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

a. Justifier que les rayons de convergence de ces séries entières vérifient $1 \leqslant R_a \leqslant R_b$.

b. Exprimer a_n en fonction de n et en déduire la valeur de R_a.

c. Montrer que pour tout $x \in]-R_a, R_a[$, $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4pqx}}$.

d. Justifier que $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k}$ et en déduire une relation liant $A(x)$ et $B(x)$, puis l'expression de $B(x)$ sur $]-R_a, R_a[$.

e. Lorsque $p \neq 1/2$, déterminer la probabilité qu'il n'y ait jamais de retour à l'origine.

Variables aléatoires

Exercice 22 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 23 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 24 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ? Que la matrice $B = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$ soit nilpotente ?

Exercice 25 (⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose X et Y *symétriques*, autrement dit que $X \sim -X$ et $Y \sim -Y$.

a. Montrer que $(X, Y) \sim (X, -Y)$, puis que $\mathbb{P}(X^2 = Y^2) = 2\mathbb{P}(X = Y) - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$.

b. Montrer que $\mathbb{P}(X + Y \geqslant 0) = \mathbb{P}(X + Y \leqslant 0)$.

Exercice 26 (⁎⁎)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé. On suppose que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leqslant x \text{ et } Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y)$.
Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y \leqslant y)$ puis que X et Y sont indépendantes.

Exercice 27 (⁎)

On appelle *variable aléatoire de Rademacher* une variable aléatoire réelle X telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \dfrac{1}{2}$.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la loi de S_n.

Exercice 28 (⁎)

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, et N une variable aléatoire indépendante des X_i et suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la loi de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Exercice 29 (⁎⁎)

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. On suppose que les variables X et $f(X)$ sont indépendantes. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(f(X) = n) = 1$.

Exercice 30 (⁎⁎⁎)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On appelle *fonction de répartition* de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$.
Montrer que la fonction F_X possède les propriétés suivantes :

- F_X est une fonction croissante ;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, F_X est continue à droite et possède une limite à gauche en a ;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F_X(a^+) - F_X(a^-) = \mathbb{P}(X = a)$.

Espérance et variance

Exercice 31 (⁎⁎)

On considère un jeu de Pile ou Face infini avec une pièce possédant la probabilité $p = \dfrac{2}{3}$ de tomber sur Face, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face consécutifs pour la première fois.
Pour $n \geqslant 1$ on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

a. Calculer p_1 et p_2.

b. Pour $n \geqslant 3$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1} et p_{n-2}, et en déduire l'expression de p_n.

c. Calculer enfin $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 32 (⁎)

On lance une infinité de fois une pièce qui a la probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur face, et on s'intéresse à la succession de lancers consécutifs donnant le même résultat. On note L_1 la longueur de la première série de lancers identiques et L_2 la longueur de la deuxième série.
Par exemple, pour la séquence suivante : PPPFFP$\cdots$ on a $L_1 = 3$ et $L_2 = 2$; pour la séquence FPPPPF$\cdots$ on a $L_1 = 1$ et $L_2 = 4$.

a. Déterminer la loi de L_1 et son espérance.

b. Déterminer la loi de L_2 et son espérance.

c. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 33 $(\ast)$

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages successifs avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

a. Que vaut $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{X})$.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{X})}{n}$.

Exercice 34 $(\ast)$

Soit $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ on note T_m la variable aléatoire du m^{e} succès, autrement dit $\mathrm{T}_m = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_k = m\right\}$. Déterminer la loi et l'espérance de T_m.

Exercice 35 $(\ast)$

a. Calculer $\mathbb{E}(1/\mathrm{X})$ lorsque $\mathrm{X} \sim \mathscr{G}(p)$.

b. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}\right)$ lorsque $\mathrm{X} \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Exercice 36 $(\ast\ast)$

On dispose de k dés équilibrés. On les lance et on ne garde que ceux qui n'ont pas amené un 6. On recommence avec les dés restants jusqu'à ce qu'ils soient tous retirés.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers qui seront effectués. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant n)$, et en déduire $\mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$.

b. Déterminer l'espérance de X lorsque $k = 2$.

Exercice 37 $(\ast\ast)$

Soit $n \geqslant 2$, $p \in]0,1[$ et $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n,\mathrm{Y}_1,\dots,\mathrm{Y}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $\mathrm{U} = \begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \vdots \\ \mathrm{X}_n\end{pmatrix}$, $\mathrm{V} = \begin{pmatrix}\mathrm{Y}_1\\ \vdots \\ \mathrm{Y}_n\end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{U}\mathrm{V}^{\mathrm{T}}$.

a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathrm{rg}(\mathrm{M})$.

b. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'une projection ?

c. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Exercice 38 $(\ast\ast)$

Soient $(\mathrm{X}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes, et M_n la matrice $(\mathrm{X}_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Déterminer l'espérance et la variance de $\mathrm{tr}(\mathrm{M}_n)$.

b. Déterminer l'espérance et la variance de $\det(\mathrm{M}_n)$.

Exercice 39 $(\ast)$

Soit X une variable aléatoire presque sûrement bornée, et X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On suppose que $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ suit la même loi que X^2. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 40 $(\ast\ast)$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ possédant un moment d'ordre 2 et d'espérance strictement positive. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant 1) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{X})^2}{\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)}$.

Exercice 41 $(\ast)$

Soit X une variable aléatoire possédant un moment d'ordre 2, et $(X_1, \dots, X_n)$ une suite finie de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$. Calculer l'espérance de S.

Exercice 42 $(\ast\ast\ast)$

Soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$, $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, $\alpha_n = \mathbb{E}(Y_n)$ et $\beta_n = \mathbb{E}(Z_n)$.

a. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.

b. Exprimer α_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent de β_n.

Exercice 43 $(\ast\ast)$

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$.
On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ et on considère $\epsilon > 0$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = (\operatorname{ch} t)^n$.

b. Montrer que pour tout $t > 0$, $\operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}$.

c. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\epsilon\right)$.

d. En déduire que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp(-n\epsilon^2/2)$.

Exercice 44 $(\ast)$

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2, telle que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}\left((X - \lambda + 1)^2 \geqslant (\lambda + 1)^2\right)$ et en déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

Exercice 45 $(\ast\ast\ast)$

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et réelles admettant un moment d'ordre 2.

a. On suppose $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(Y^2) > 0$, et on pose $Z = \mathbb{1}_{Y>0}$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à Y et Z, Montrer que $\mathbb{P}(Y > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$.

b. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(X - \mathbb{E}(X) < \epsilon\right) \geqslant \dfrac{\epsilon^2}{\mathbb{V}(X) + \epsilon^2}$, puis l'inégalité de Cantelli :

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \epsilon^2}$$

Exercice 46 $(\ast\ast)$

Soient X et Y deux variables aléatoires linéaires possédant un moment d'ordre 2. On suppose $\mathbb{V}(X) > 0$. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ minimisant la quantité $\mathbb{E}\left((Y - aX - b)^2\right)$. La droite d'équation $y = ax + b$ est appelée la droite de régression linéaire de X et Y ; elle donne la « meilleure » expression linéaire de Y en fonction de X.

Exercice 47 (⋆⋆)

On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) *converge en probabilité* vers une variable aléatoire X lorsque pour tout $\epsilon > 0$, $\lim \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0$.

a. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, un réel m et une suite de variables aléatoires (X_n) possédant toutes un moment d'ordre 2 et telle que :

- la suite $(\mathbb{E}(X_n))$ converge vers m ;
- la suite $(\mathbb{V}(X_n))$ converge vers 0.

Montrer que (X_n) converge en probabilité vers $X = m$;

b. Soit S_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On pose $Y_n = \exp(S_n/n)$. Montrer que (Y_n) converge en probabilité vers $Y = \exp(p)$.

Séries génératrice

Exercice 48 (⋆)

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, et G_X sa série génératrice. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_X(e^{it}) e^{-int} \, dt$$

Exercice 49 (⋆)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in]0, 1[$ fixés. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k$$

a. Calculer la fonction génératrice G_X de X et en déduire la valeur de a.

b. Calculer l'espérance de X.

Exercice 50 (⋆⋆⋆)

On considère deux variables aléatoires entières N et X, ainsi qu'une suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ de variables aléatoires entières indépendantes et de même loi que X. On suppose que N est indépendante des X_i et on pose $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

a. Montrer que les séries génératrices de X, N et Y vérifient la relation : $G_Y = G_N \circ G_X$.

b. En déduire que si N et X admettent une espérance, il en est de même de Y, et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ (formule de Wald).