Intégration

Intégration des fonctions continues par morceaux

Exercice 1 (∗)

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Établir que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$.

Exercice 3 (∗)

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

Exercice 4 (∗)

Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}\right)$.

Exercice 5 (∗∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)$.

Exercice 6 (∗∗)

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|x-\mathrm{e}^{it}|\,\mathrm{d}t$ en utilisant une somme de Riemann.

Dérivation et intégration

Exercice 7 (∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $g'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $x''+x = f(x)$.

c. Quel est l'ensemble des solutions de cette équation différentielle ?

Exercice 8 (∗)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant : $\forall t \in [a,b]$, $f(a+b-t) = f(t)$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 (∗)

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, et en déduire $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 10 (∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), et calculez u_0 et u_1.

Exercice 11 (⋆⋆)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Soit $g : x \mapsto x \int_a^x (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t + (1-x)\int_x^b t f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et que $g'' = f$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_n : x \mapsto \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que h_n est de classe $\mathscr{C}^n$ et que $h_n^{(n)} = f$.

Exercice 12 (⋆⋆)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f ne s'annule pas sur $]a,b[$.

a. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(c)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. **Application**. Soit g une fonction continue au voisinage de 0. Déterminer la limite $\lim\limits_{x \to 0} \int_0^x t g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 (⋆⋆)

Pour $0 < a < b$ déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1-\cos(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14 (⋆)

Soit $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 15 (⋆⋆⋆)

a. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]a,b[$.

c. Soit $n \geqslant 2$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]a,b[$.

Exercice 16 (⋆⋆⋆)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue à valeurs strictement positives, et $\mathrm{I} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer l'existence d'une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{I}}{n}$.

b. Quelle est la limite de $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)$?

Exercice 17 (⋆⋆⋆)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $\mathrm{M}_2 = \sup\limits_{t \in [a,b]} \|f''(t)\|$.

Montrer que : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_2 \frac{(b-a)^3}{12}$. On pourra procéder à deux intégrations par parties successives.

Exercice 18 (⋆⋆)

Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$. Trouver la limite de f lorsque x tend vers 0.

Exercice 19 (∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$, et $s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$. Déterminer la limite de la suite (s_n).

Exercice 20 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$, établir que pour tout $h > 0$,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

puis en déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.
En utilisant cette fois les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ ainsi qu'entre x et $x-h$, établir que

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

et en déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$.

Intégrales généralisées

Exercice 21 (∗)

Déterminer sans recourir à la recherche de primitives la convergence ou non des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22 (∗)

Justifier l'existence puis calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23 (∗)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que les intégrales suivantes soient convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24 (∗)

Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ln(t+\mathrm{e}^{-\beta t})\,\mathrm{d}t$$

Exercice 25 (∗∗)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, telle que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)^2\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu'il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 26 (∗∗)

À l'aide d'une intégration par parties, prouver que l'intégrale de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 27 (∗)

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge puis calculer sa valeur en utilisant le changement de variable $u = 1/t$.

b. Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}$.

Exercice 28 (∗)

Justifier l'existence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$, puis montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, et en déduire la valeur de I.

Exercice 29 (∗∗)

Soient α et β deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Soit $x > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 30 (∗∗)

a. Justifier l'existence de : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b. Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

À l'aide de la formule : $\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$, montrer que $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 31 (∗∗)

Soit $f : [0,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction monotone et intégrable sur $[0,1[$, et $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 32 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\big(f(t)-f(t+1)\big)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 33 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

b. On suppose de plus f' intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

c. Soit $\alpha > 1/2$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 34 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.

On pose $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{T}} \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \lambda x$.

a. Montrer que la fonction F est T-périodique.

b. Soit $\alpha > 0$. Démontrer la convergence puis l'égalité des intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{f(t)-\lambda}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} = \alpha \displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{\mathrm{F}(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 35 (∗)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable. Montrer que pour tout $h > 0$ la série $\sum h f(nh)$ converge, puis calculer la limite $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} h f(nh)$.

Le théorème de convergence dominée

Exercice 36 (∗)

Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + \mathrm{e}^t}$.

Exercice 37 (∗)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 38 (∗∗)

Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 39 (∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n t^n f(t)\,\mathrm{d}t = f(1)$.

Exercice 40 (∗)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Déterminer la limite de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

b. On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que $\mathrm{I}_n = f(0) + \displaystyle\int_0^1 \left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right) f'(u)\,\mathrm{d}u$.

c. En déduire que $\mathrm{I}_n = f(0) - \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^1 \ln(u) f'(u)\,\mathrm{d}u + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 41 (∗)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée, telle que $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 42 (∗∗)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} nf(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} nf(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour la seconde intégrale, vous pourrez considérer la suite de fonctions (f_n) définie par : $f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

Exercice 43 (∗)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f et f' soient bornées. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} nf(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ existe, et calculer $\ell = \lim\limits_{+\infty} \mathrm{I}_n$.

On suppose $f'(0) \neq 0$. Donner un équivalent de $(\mathrm{I}_n - \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 44 (∗)

Calculez la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on considérera la fonction $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Exercice 45 (∗)

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$.

Exercice 46 (∗)

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$ (utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$).

Exercice 47 (∗∗)

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 48 (∗∗)

On pose pour $n \geqslant 1$: $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. Justifier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 49 (⋆⋆)

Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs, divergeant vers $+\infty$. On considère la fonction suivante :

$$\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, \mathrm{e}^{-\lambda_n x}.$$

a. Quel est l'ensemble de définition de S ? Y-est-elle continue ?

b. On suppose la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ convergente. Montrer que S est intégrable sur $]0,+\infty[$, et calculer $\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$.

c. On ne suppose plus la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ convergente. Montrer que le résultat précédent subsiste.

Exercice 50 (⋆⋆⋆)

a. Justifier l'existence de l'intégrale $\mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$, puis montrer que $\mathrm{K} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \, \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

b. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t \, \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$, et en déduire que $\mathrm{K} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 51 (⋆⋆⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Justifier l'existence puis calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Indication : écrire $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, *puis établir successivement que* $u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ *et enfin que* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$.

Intégrales à paramètre

Exercice 52 (⋆⋆)

Montrer la continuité de l'application définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ puis préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

Exercice 53 (⋆⋆)

Soit $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue. Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \int_0^1 \frac{x h(t)\,\mathrm{d}t}{x^2+t^2} = \frac{\pi}{2} h(0)$.

Exercice 54 (⋆)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \arctan t \,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ puis en donner un équivalent en 0 et en $+\infty$.

Exercice 55 (⋆)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f'(x)$, et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 56 (⋆)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. En déduire une expression de g sans symbole intégral (on admettra que $g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 57 (∗)

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Montrer qu'elle est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par g sur $]0,+\infty[$.

Exercice 58 (∗∗)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$.

a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. f est-elle continue sur cet intervalle ? Dérivable ?

b. On pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Exprimer f à l'aide de h et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 59 (∗∗)

On pose quand c'est possible $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

a. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f. Est-elle continue sur $\mathcal{D}$? De classe $\mathscr{C}^1$?

b. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

c. Donner un équivalent de f en $(-1)^+$.

Exercice 60 (∗∗)

On pose pour $x \geqslant 0$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer explicitement $f'(x)$ pour en déduire $f(x)$.

Exercice 61 (∗∗)

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2+\sin^2 t)\,dt$. Quel est son ensemble de définition ? g y-est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$? Exprimer g sans symbole intégral.

Exercice 62 (∗∗)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\,dt$, et en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.