Séries entières

Rayon de convergence

Exercice 1 (∗)

Soit $a > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum e^{\sqrt{n}} z^n \qquad \sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n \qquad \sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^{2n} \qquad \sum n^{(-1)^n} z^n$$
$$\sum \frac{n^n}{n!} z^{2n} \qquad \sum a^n z^{n!} \qquad \sum \frac{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-2)}{n!} z^{2n} \qquad \sum \binom{2n}{n} z^n$$

Exercice 2 (∗)

Pour $n \geqslant 1$ on note a_n le nombre de diviseurs de n. déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 3 (∗)

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, et $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$?

Exercice 4 (∗)

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergences respectifs R_p et R_i.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 5 (∗)

Soit (a_n) une suite ne s'annulant pas. On note R_1 le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_2 celui de $\sum \frac{1}{a_n} z^n$.
Montrer que $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 \leqslant 1$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Exercice 6 (∗)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie : $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_a\mathrm{R}_b$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Exercice 7 (∗∗)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Exercice 8 (∗∗)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

a. Soit $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$.

b. Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{P}(n) a_n z^n$.

Calcul de sommes

Exercice 9 ($\ast$)

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ sur l'intervalle ouvert de convergence, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

Exercice 10 ($\ast$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum s_n x^n$, puis en calculer la somme.

Exercice 11 ($\ast\ast$)

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

Exercice 12 ($\ast\ast$)

Calculer la somme sur l'intervalle ouvert de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$.

Exercice 13 ($\ast\ast$)

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 14 ($\ast\ast$)

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

a. Quel est son rayon de convergence ? On note $\mathrm{Li}_2(x)$ sa somme (cette fonction s'appelle le dilogarithme). Reconnaître sa dérivée.

b. Pour $x \in \,]0,1[$, exprimer $\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

c. En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

Développement en série entière

Exercice 15 ($\ast$)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, les fonctions :

$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x$ (utiliser la formule d'Euler)

$f_2 : x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$ (factoriser le polynôme)

$f_3 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{1-2x\operatorname{ch} a + x^2}\right)$ (factoriser le polynôme)

$f_4 : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (dériver la fonction)

$f_5 : x \mapsto (\arctan x)^2$ (utiliser un produit de Cauchy)

$f_6 : x \mapsto \sin(\alpha \arcsin x)$ (déterminer une équation différentielle vérifiée par f_6)

Exercice 16 (⋆)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2}\, dt$ est développable en série entière au voisinage de 0, puis calculer les coefficients de ce développement.

Exercice 17 (⋆)

Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ et en déduire le développement de $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{1-x}$.

Exercice 18 (⋆)

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$, dont on cherche l'unique solution vérifiant les conditions de Cauchy : $y(0) = y'(0) = 0$.
Si cette solution est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
Calculer explicitement a_n en fonction de n. Quel est le rayon de convergence de la série entière correspondante, et quel en est la somme ?

Exercice 19 (⋆)

Développer en série entière $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ en exploitant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 20 (⋆⋆)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, la fonction $x \mapsto \arctan(x+1)$.

Exercice 21 (⋆⋆)

Soit $r > 0$ et f et g deux fonctions développables en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$. On suppose que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x)g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 22 (⋆⋆)

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. On suppose pour l'instant que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ est strictement positif et on note $f(x)$ sa somme sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$.

b. En déduire que pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

c. En déduire la valeur de R, puis développer en série entière l'expression précédente pour en déduire l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 23 (⋆⋆)

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle *dérangement* de E une permutation sans point fixe, et on note d_n le nombre de ces dérangements, avec la convention $d_0 = 1$.

a. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$.

b. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence est au moins égal à 1, calculer $e^x f(x)$ et en déduire $f(x)$.

c. Prouver alors que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

Étude au bord de l'intervalle de convergence

Exercice 24 (∗∗)

Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs telle que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ soit égal à 1 et la série $\sum a_n$ divergente. Pour tout $x \in]-1,1[$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Exercice 25 (∗∗)

En utilisant le développement en série entière de la fonction arctan, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 26 (∗∗∗)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge, et on pose pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

b. En déduire que $\lim_{x \to 1} f(x) = S$.