# Séries entières

## Rayon de convergence

### Exercice 1 (∗)

Soit $a > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum e^{\sqrt{n}} z^n \qquad \sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n \qquad \sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^{2n} \qquad \sum n^{(-1)^n} z^n$$

$$\sum \frac{n^n}{n!} z^{2n} \qquad \sum a^n z^{n!} \qquad \sum \frac{1 \times 4 \times 7 \times \cdots \times (3n-2)}{n!} z^{2n} \qquad \sum \binom{2n}{n} z^n$$

### Exercice 2 (∗)

Pour $n \geqslant 1$ on note $a_n$ le nombre de diviseurs de $n$. déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

### Exercice 3 (∗)

Soit $(a_n)$ une suite de réels strictement positifs, R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, et $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$ ?

### Exercice 4 (∗)

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergences respectifs $R_p$ et $R_i$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

### Exercice 5 (∗)

Soit $(a_n)$ une suite ne s'annulant pas. On note $R_1$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et $R_2$ celui de $\sum \frac{1}{a_n} z^n$.
Montrer que $R_1 R_2 \leqslant 1$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

### Exercice 6 (∗)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie : $R \geqslant R_a R_b$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

### Exercice 7 (∗∗)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

### Exercice 8 (∗∗)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

*a.* Soit $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$.

*b.* Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum P(n) a_n z^n$.

## Calcul de sommes

### Exercice 9 (∗)

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ sur l'intervalle ouvert de convergence, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

### Exercice 10 (∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum s_n x^n$, puis en calculer la somme.

### Exercice 11 (∗∗)

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

### Exercice 12 (∗∗)

Calculer la somme sur l'intervalle ouvert de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$.

### Exercice 13 (∗∗)

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ sur son intervalle ouvert de convergence.

### Exercice 14 (∗∗)

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$.

*a.* Quel est son rayon de convergence ? On note $\mathrm{Li}_2(x)$ sa somme (cette fonction s'appelle le dilogarithme). Reconnaître sa dérivée.

*b.* Pour $x \in ]0,1[$, exprimer $\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

*c.* En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

## Développement en série entière

### Exercice 15 (∗)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, les fonctions :

$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \sin x$ (utiliser la formule d'Euler)

$f_2 : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$ (factoriser le polynôme)

$f_3 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{1 - 2x \operatorname{ch} a + x^2}\right)$ (factoriser le polynôme)

$f_4 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (dériver la fonction)

$f_5 : x \mapsto (\arctan x)^2$ (utiliser un produit de Cauchy)

$f_6 : x \mapsto \sin(\alpha \arcsin x)$ (déterminer une équation différentielle vérifiée par $f_6$)

## Exercice 16 (∗)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière au voisinage de 0, puis calculer les coefficients de ce développement.

## Exercice 17 (∗)

Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ et en déduire le développement de $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1-x}$.

## Exercice 18 (∗)

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$, dont on cherche l'unique solution vérifiant les conditions de Cauchy : $y(0) = y'(0) = 0$.
Si cette solution est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme : $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, quelle relation de récurrence doit vérifier la suite $(a_n)$ ?
Calculer explicitement $a_n$ en fonction de $n$. Quel est le rayon de convergence de la série entière correspondante, et quel en est la somme ?

## Exercice 19 (∗)

Développer en série entière $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ en exploitant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

## Exercice 20 (∗∗)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, la fonction $x \mapsto \arctan(x+1)$.

## Exercice 21 (∗∗)

Soit $r > 0$ et $f$ et $g$ deux fonctions développables en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$. On suppose que pour tout $x \in ]-r, r[$, $f(x)g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

## Exercice 22 (∗∗)

Soit $(a_n)$ la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. On suppose pour l'instant que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ est strictement positif et on note $f(x)$ sa somme sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

*a.* Montrer que pour tout $x \in ]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$.

*b.* En déduire que pour tout $x \in ]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[ \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

*c.* En déduire la valeur de R, puis développer en série entière l'expression précédente pour en déduire l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.

## Exercice 23 (∗∗)

Soit E un ensemble de cardinal $n$. On appelle *dérangement* de E une permutation sans point fixe, et on note $d_n$ le nombre de ces dérangements, avec la convention $d_0 = 1$.

*a.* Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$.

*b.* On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence est au moins égal à 1, calculer $\mathrm{e}^x f(x)$ et en déduire $f(x)$.

*c.* Prouver alors que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

## Étude au bord de l'intervalle de convergence

### Exercice 24 (∗∗)

En utilisant le développement en série entière de la fonction arctan, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

### Exercice 25 (∗∗)

Soit $(a_n)$ une suite de nombres réels positifs telle que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ soit égal à 1. Pour tout $x \in ]-1,1[$ on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

*a.* On suppose la série $\sum a_n$ convergente et on note S sa somme. Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \mathrm{S}$.

*b.* On suppose la série $\sum a_n$ divergente. Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

### Exercice 26 (∗∗∗)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge, et on pose pour tout $x \in ]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

*a.* Montrer que pour tout $x \in ]-1,1[$, $f(x) = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{S}_n x^n$.

*b.* En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \mathrm{S}$.