Suites et séries numériques

Suites numériques

Exercice 1 (⋆)

a. Trouver une suite strictement positive de limite nulle qui n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

b. Soit (u_n) une suite strictement positive de limite nulle. Montrer qu'elle admet une sous-suite décroissante.

Exercice 2 (⋆⋆)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim u_n^2 = 1$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| < 1$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 (⋆)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 0$. Montrer que $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Exercice 4 (⋆⋆)

Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ, et (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k$. Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite (*s'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro*).

Exercice 5 (⋆⋆⋆)

Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ, et $v_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u_k$. Montrer que (v_n) converge vers ℓ.

Exercice 6 (⋆)

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et de la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

a. Étudier l'éventuelle convergence de la suite (u_n).

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. Montrer que $\lim(v_{n+1} - v_n) = 1$.

c. En déduire à l'aide du lemme de l'escalier un équivalent de u_n.

Exercice 7 (⋆)

Donner la limite puis un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Indication : trouver une valeur de α *permettant d'appliquer le lemme de l'escalier à la suite* $v_n = u_n^{\alpha}$.

Exercice 8 (⋆⋆)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{X} - k)$.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ il existe un unique réel x_n dans $]0,1[$ tel que $\mathrm{P}_n'(x_n) = 0$.

Indication : étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)}$.

b. Déterminer la limite puis un équivalent de la suite (x_n).

Exercice 9 (⋆⋆⋆)

Soit (x_n) une suite réelle, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$.

a. Montrer que si (y_n) converge vers 0, il en est de même de la suite (x_n).

b. En déduire que si (y_n) converge il en est de même de la suite (x_n).

Exercice 10 (⋆⋆)

Soit (z_n) une suite complexe vérifiant la relation $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Séries à terme général positif

Exercice 11 (∗)

Étudier la convergence des séries des termes généraux suivants :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e} \qquad \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \qquad 1-\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \qquad (\operatorname{ch} n)^\alpha-(\operatorname{sh} n)^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

Exercice 12 (∗∗)

Étudier la convergence des séries des termes généraux suivants :

$$\mathrm{e}^{-(\ln n)^\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) \qquad \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan(n-2)\right)$$

Exercice 13 (∗)

Pour quelles valeurs de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ la série de terme général $u_n=\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer dans ce cas la somme de cette série.

Exercice 14 (∗)

Étudier à l'aide du critère de d'Alembert la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{n^{\ln n}}{n!}$.

Exercice 15 (∗)

Discuter en fonction de $\alpha>0$ la nature de la série $\sum\dfrac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$.

Exercice 16 (∗)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$. Donner un équivalent simple de $u_{n+1}-u_n$, et en déduire l'existence d'une constante γ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$.

Exercice 17 (∗)

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif, et $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 18 (∗)

Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives. On dit que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge lorsque la suite des produits partiels $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ possède une limite finie.

Montrer que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 19 (∗∗)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs ; on suppose qu'il existe $\alpha>1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Utiliser une comparaison logarithmique avec une série de Riemann pour prouver la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 20 ($\star$)

Une *série de Bertrand* est de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Lorsque $\alpha > 1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée converge.

b. Lorsque $\alpha < 1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée diverge.

c. Lorsque $\alpha = 1$, montrer en utilisant la technique de comparaison à une intégrale que la série de Bertrand converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 21 ($\star\star\star$)

Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Comparaison à une intégrale

Exercice 22 ($\star$)

En exploitant une comparaison série/intégrale, déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 23 ($\star$)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Exercice 24 ($\star$)

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale calculer $\displaystyle\lim_{x\to1^+} (x-1)\zeta(x)$.

Séries alternées

Exercice 25 ($\star$)

Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature bien que u_n soit équivalent à v_n.

Exercice 26 ($\star$)

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}} \text{ avec } \alpha > 0 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos(n)} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n-(\ln n)^\alpha}$$

Exercice 27 ($\star\star$)

Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n}$ et $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 28 ($\star\star$)

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k\sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : regrouper les termes deux par deux.

Transformation d'Abel

Exercice 29 (∗)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum \frac{\mathrm{H}_n}{n(n+1)}$ converge, et en calculer la somme.

Exercice 30 (∗∗)

Soit une suite (u_n) telle que la série $\sum n u_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Indication. Poser $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k u_k$ *et exprimer* u_n *à l'aide des termes de la suite* (S_n).

Exercice 31 (∗∗)

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante, telle que $\sum u_n$ converge.

a. Montrer que $n u_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, et en déduire que $\lim n u_{2n} = 0$, puis que $\lim n u_n = 0$.

b. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

c. *Application*. Calculer pour $0 \leqslant r < 1$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n r^n$.

Produit de Cauchy

Exercice 32 (∗∗)

Soit $a \in [0,1[$. Écrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries, et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n a^n$. Calculer par la même méthode $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n$.