Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1 (∗)

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = nx^n \ln x$ pour $x \in \,]0,1]$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.
On considère un réel $\alpha \in \,]0,1[$. La convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0,\alpha]$? sur $[\alpha,1]$?

Exercice 2 (∗)

Soit $\alpha \geqslant 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$.
À quelle condition portant sur α la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 3 (∗)

Étudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0,+\infty[$ de la suite de fonctions (f_n), avec :

a. $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+n}$; *b.* $f_n : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x/n}$; *c.* $f_n : x \mapsto n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}$; *d.* $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$.

Le cas échéant, on précisera des intervalles $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ sur lesquels la convergence est uniforme.

Exercice 4 (∗)

Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,+\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

Pour les 5/2 : calculer ensuite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (∗)

Soit $f_n : [0,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f_n(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{nx}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$. Calculer $f_n(n)$; la convergence de la suite de fonctions (f_n) est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$? et sur $[0,a]$ (avec $a > 0$) ?

Exercice 6 (∗∗)

Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $h(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} h(x) = 0$. On définit les suites de fonctions (f_n) et (g_n) en posant : $f_n(x) = h(nx)$ et $g_n(x) = h(x/n)$.

a. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ des suites de fonctions (f_n) et (g_n).

b. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

c. Sur quels intervalles y-a-t'il convergence uniforme ?

Exercice 7 (∗∗)

Soit $g : [0,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-nx}$.

a. Étudier la convergence simple de (f_n), puis montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

b. Fixons $\epsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ de sorte que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $|f_n(x)| \leqslant \epsilon$, et en déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8 ($\ast\ast\ast$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f'' soit bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{n}{2}\Big(f\Big(x+\dfrac{1}{n}\Big) - f\Big(x-\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$.

a. Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une fonction à préciser.

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Séries de fonctions

Exercice 9 ($\ast$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$ on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)^2}$ et $v_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum u_n$ puis de $\sum v_n$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 10 ($\ast$)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
Utiliser un encadrement donné par la technique de comparaison à une intégrale pour déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 11 ($\ast\ast$)

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

a. Justifier que f est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b. Démontrer que pour tout $x > 0$, $2f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+nx)\big(1+(n+1)x\big)}$.

c. Utiliser le critère spécial des séries alternées pour en déduire un encadrement de $f(x)$, puis sa limite en 0.

Exercice 12 ($\ast$)

Déterminer le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$

Exprimer la dérivée sans symbole de sommation, et en déduire une expression simple de $f(x)$.

Exercice 13 ($\ast$)

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 14 ($\ast\ast$)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, puis donner des équivalents simples de f en $+\infty$ et en 0.

Exercice 15 ($\ast\ast$)

Soit (a_n) une suite décroissante à valeurs positives, et $f_n : x \mapsto a_n x^n (1-x)$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b. Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est normale sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

c. Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.

Exercice 16 ($\ast\ast$)

Soit a un réel fixé dans $]-1,1[$. On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}$.

a. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire une expression simple de $f'(x)$ puis de $f(x)$. On admettra que $f(0) = -\ln(1-a)$.

c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(x) + 1)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 17 ($\ast\ast$)

On pose sous réserve de convergence : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f et de continuité de f.

b. Déterminer la limite en 0 de $xf(x)$.

Exercice 18 ($\ast\ast$)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

b. Montrer que la quantité $xf(x) - f(x+1)$ est constante sur $]0,+\infty[$.

c. Donner des équivalents en 0 et $+\infty$ de $f(x)$.

d. Tracer la courbe représentative de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 19 ($\ast\ast$)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

a. Établir l'existence et la continuité de f sur $]0,+\infty[$.

b. Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

c. Tracer la courbe représentative de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 20 ($\ast\ast$)

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\big)$.

a. Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b. Chercher une relation simple liant $f(x)$ et $f(x+1)$.

c. Trouver $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.