

# Suites et séries numériques

## Suites numériques

### Exercice 1 (\*)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On suppose la suite  $(u_n)$  croissante et la suite  $(u_{2n})$  convergente. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

### Exercice 2 (\*\*)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $\lim u_n^2 = 1$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - u_n| < 1$ . Montrer que  $(u_n)$  converge.

### Exercice 3 (\*)

On considère deux réels  $a$  et  $b$  vérifiant :  $0 < a < b$ , ainsi que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

### Exercice 4 (\*)

Soit  $(u_n)$  une suite définie par la donnée de  $u_0 > 0$  et de la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

- Étudier l'éventuelle convergence de la suite  $(u_n)$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $v_n = e^{u_n}$ . Montrer que  $\lim(v_{n+1} - v_n) = 1$ .
- En déduire à l'aide du théorème de Cesàro un équivalent de  $u_n$ .

### Exercice 5 (\*)

Donner la limite puis un équivalent de la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 6 (\*\*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$ .

- Montrer que pour tout  $n \geq 2$  il existe un unique réel  $x_n \in ]0, 1[$  tel que  $P'_n(x_n) = 0$ .

Indication : étudier la fonction  $x \mapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$ .

- Déterminer la limite puis un équivalent de la suite  $(x_n)$ .

### Exercice 7 (\*\*\*)

Soit  $(x_n)$  une suite réelle, et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < \alpha < \beta$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$ .

- Montrer que si  $(y_n)$  converge vers 0, il en est de même de la suite  $(x_n)$ .
- En déduire que si  $(y_n)$  converge il en est de même de la suite  $(x_n)$ .

### Exercice 8 (\*\*)

Soit  $(z_n)$  une suite complexe vérifiant la relation  $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$ . Montrer que  $(z_n)$  converge et exprimer sa limite en fonction de  $z_0$ .

## Séries à terme général positif

### Exercice 9 (\*)

Étudier la convergence des séries de terme général ( $\alpha$  désigne un paramètre réel quelconque) :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \quad 1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad \arccos\left(\frac{2}{\pi} \arctan(n-2)\right)$$
$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \quad u_n = (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha \quad u_n = \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) \quad e^{-(\ln n)^\alpha}$$

### Exercice 10 (\*)

Pour quelles valeurs de  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  la série de terme général  $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$  est-elle convergente ? Calculer dans ce cas la somme de cette série.

### Exercice 11 (\*)

Étudier à l'aide du critère de d'Alembert la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{n^{\ln n}}{n!}$ .

### Exercice 12 (\*)

Discuter en fonction de  $\alpha > 0$  la nature de la série  $\sum \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$ .

### Exercice 13 (\*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ . Donner un équivalent simple de  $u_{n+1} - u_n$ , et en déduire l'existence d'une constante  $\gamma$  telle que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ .

### Exercice 14 (\*)

Soit  $\sum u_n$  une série à terme général positif, et  $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ . Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont même nature.

### Exercice 15 (\*)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle à valeurs positives. Montrer que le produit infini  $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$  converge si et seulement si la série  $\sum u_n$  converge.

### Exercice 16 (\*\*)

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs ; on suppose qu'il existe  $\alpha > 1$  tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Utiliser une comparaison logarithmique avec une série de Riemann pour prouver la convergence de  $\sum u_n$ .

### Exercice 17 (\*)

Une *série de Bertrand* est de la forme  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ .

- Lorsque  $\alpha > 1$ , montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée converge.
- Lorsque  $\alpha < 1$ , montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée diverge.
- Lorsque  $\alpha = 1$ , montrer en utilisant la technique de comparaison à une intégrale que la série de Bertrand converge si et seulement si  $\beta > 1$ .

### Exercice 18 (\*\*\*)

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ . Montrer que la série  $\sum u_n$  converge.

## Comparaison à une intégrale

### Exercice 19 (\*)

En exploitant une comparaison série/intégrale, déterminer la limite :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$ .

### Exercice 20 (\*)

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ .

### Exercice 21 (\*)

Pour  $x > 1$  on pose  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ . En comparant  $\zeta(x)$  à une intégrale calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta(x)$ .

## Séries alternées

### Exercice 22 (\*)

Pour tout  $n \geq 1$  on pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ . Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ne sont pas de même nature bien que  $u_n$  soit équivalent à  $v_n$ .

### Exercice 23 (\*)

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n}} \quad u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ avec } \alpha > 0 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos(n)} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n - (\ln n)^\alpha}$$

### Exercice 24 (\*\*)

Déterminer la nature des séries  $\sum \frac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n}$  et  $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$ .

### Exercice 25 (\*\*)

On pose  $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sqrt{k}$ . Donner un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Indication : regrouper les termes deux par deux.

## Transformation d'Abel

### Exercice 26 (\*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que la série  $\sum \frac{H_n}{n(n+1)}$  converge, et en calculer la somme.

### Exercice 27 (\*\*)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle positive décroissante, telle que  $\sum u_n$  converge.

a. Montrer que  $\lim nu_n = 0$ .

b. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$  converge et a même somme que  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

c. *Application.* Calculer pour  $0 \leq r < 1$  la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n$ .

### Exercice 28 (\*\*\*)

Soit une suite  $(u_n)$  telle que la série  $\sum nu_n$  converge. Montrer que la série  $\sum u_n$  converge.

*Indication.* Poser  $S_n = \sum_{k=1}^n ku_k$  et exprimer  $u_n$  à l'aide des termes de la suite  $(S_n)$ .

## Produit de Cauchy

### Exercice 29 (\*\*)

Soit  $a \in [0, 1[$ . Écrire  $\frac{1}{(1-a)^2}$  comme produit de deux séries, et en déduire la somme de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} na^n$ . Calculer par la

même méthode  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n$ .