Espaces euclidiens

Produit scalaire

Exercice 1 (∗)

Soit E un espace euclidien, $a \in \mathrm{E}$ tel que $\|a\| = 1$, et $k \in \mathbb{R}$. On définit $\phi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \phi(x, y) = \langle x \mid y \rangle + k\langle x \mid a \rangle\langle y \mid a \rangle.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante ϕ est-il un produit scalaire ?

Exercice 2 (∗∗)

Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable.

On définit la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\mathrm{A}_{ij} = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f_i(t) f_j(t)\,\mathrm{d}t$.

À quelle condition l'application $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y}$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3 (∗)

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Prouver que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Dans quel cas y-a-t'il égalité ?

Exercice 4 (∗)

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application non identiquement nulle de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(1) = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t < 4\int_0^1 t^2 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (∗∗)

Soit E un espace préhilbertien réel, et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs unitaires.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $\displaystyle\left\|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k u_k\right\| \leqslant \sqrt{n}$.

a. On considère n variables aléatoires indépendantes $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n$ de même loi de Rademacher (autrement dit, $\mathbb{P}(\mathrm{R}_k = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{R}_k = -1) = 1/2$). Calculer l'espérance de $\displaystyle\left\|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_k u_k\right\|^2$.

b. Conclure.

Projection orthogonale

Exercice 6 (∗)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On considère un espace euclidien E de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. Déterminer la matrice associée dans la base (e) à la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

Exercice 7 (∗)

Montrer que l'application $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, et utiliser cette remarque pour calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^k - at - b)^2\,\mathrm{d}t$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

Exercice 8 ($\ast$)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle M \mid N\rangle = \operatorname{tr}(M^{\mathrm{T}}N)$, on pose $H = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \operatorname{tr}(M) = 0\right\}$, et on note J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

Exercice 9 ($\ast\ast$)

Soit p une projection vectorielle d'un espace euclidien E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 10 ($\ast\ast\ast$)

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, et on note $(P_0,\dots,P_n)$ la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

a. Calculer $P_k(0)^2$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. On note $H = \left\{P \in E \,\middle|\, P(0) = 0\right\}$. Quelle est la dimension de H ? Déterminer une base de $H^{\perp}$ à l'aide des $P_0, \dots, P_n$.

c. Déterminer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1 - a_1 t - \dots - a_n t^n)^2\,\mathrm{d}t \,\middle|\, (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Espaces euclidiens

Exercice 11 ($\ast\ast$)

Soient (e) et (f) deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la quantité $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle f_i \mid u(e_j)\rangle^2$ ne dépend pas de (e) et (f).

Exercice 12 ($\ast\ast$)

Soit E un espace euclidien de dimension n, et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs vérifiant :

(i) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\|u_k\| = 1$;

(ii) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1$.

a. Montrer qu'on peut remplacer la condition (ii) par la condition :

(iii) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \implies \langle u_i \mid u_j\rangle = 1/2$.

b. Montrer alors que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre.

Exercice 13 ($\ast\ast$)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Prouver l'existence d'une base $(u_1,\dots,u_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \implies \|u_i - u_j\| = 1$ (on pourra raisonner par récurrence).

Exercice 14 ($\ast\ast\ast$)

Soit E un espace euclidien de dimension n.
Une famille de p vecteurs $(x_1,\dots,x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque $i \neq j \implies \langle x_i \mid x_j\rangle < 0$. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que $p \leqslant n+1$.

Exercice 15 (⁎⁎)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note Q_n le polynôme $\dfrac{1}{2^n n!}\Big((X^2-1)^n\Big)^{(n)}$.

a. Exprimer le degré et le coefficient dominant de Q_n, et déterminer les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

b. On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis que pour tout $n \geqslant 1$, Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c. Calculer $\|Q_n\|$.

d. Exprimer à l'aide de la famille (Q_n) la famille obtenue lorsqu'on applique la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 (⁎⁎⁎)

Soit E un espace euclidien de dimension n, $(u_1,\dots,u_n)$ une base de E, et $(e_1,\dots,e_n)$ la base orthonormée obtenue par le procédé de Schmidt à partir de $(u_1,\dots,u_n)$. On note $R = \mathrm{Mat}_e(u_1,\dots,u_n)$ la matrice des composantes dans la base (e) de la famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_n)$.

a. Justifier l'affirmation : « R est une matrice triangulaire supérieure », et en déduire que $|\det R| \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|u_i\|$.

On considère maintenant une matrice inversible $A = (a_{ij}) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

b. Démontrer l'existence d'une matrice orthogonale Q et d'une matrice triangulaire supérieure R vérifiant : $A = QR$.

c. En déduire que si les coefficients de A vérifient : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{ij}| \leqslant 1$, alors $|\det A| \leqslant n^{n/2}$. Peut-on avoir égalité ?

Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice 17 (⁎)

Soit E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$. On considère $u : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \lambda\langle x \mid a\rangle a \end{pmatrix}$.

À quelle condition a-t-on $u \in \mathcal{O}(E)$? Dans ce cas, décrire u.

Exercice 18 (⁎)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle M \mid N\rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$.
Soit $A \in E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(M) = AM$. À quelle condition u est-il une isométrie vectorielle de E ?

Exercice 19 (⁎)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, (e) une base orthonormée d'un espace euclidien E, et $u \in \mathcal{O}(E)$ défini par : $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. Justifier que $a_{ij} = \langle e_i \mid u(e_j)\rangle$, et en déduire que : $\Big|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big| \leqslant n$.

Exercice 20 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie vectorielle. On pose $v = u - \mathrm{Id}$.
Montrer que $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, v)^{\perp}$.

En déduire que la suite $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$ converge vers p, projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\, v$.

Exercice 21 (⁎⁎)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x \mid y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x) \mid u(y)\rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle $v \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = \lambda v$.

Exercice 22 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien. On considère des vecteurs $u_1,\dots,u_n$ et $v_1,\dots,v_n$ de E tels que pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\langle u_i \mid u_j\rangle = \langle v_i \mid v_j\rangle$, et le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une isométrie vectorielle $f\in\mathcal{O}(\mathrm{E})$ telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f(u_i)=v_i$.

a. Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une base de E.

b. Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une famille génératrice de E.

c. Traiter l'exercice dans le cas général.

Exercice 23 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien de dimension n. À $(x_1,\dots,x_p)\in\mathrm{E}^p$ on associe la *matrice de Gram* :

$$\mathrm{G}=\big(\langle x_i \mid x_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}.$$

Montrer que $\mathrm{G}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$, où $\mathrm{A}=\mathrm{Mat}_e(x_1,\dots,x_p)$ et (e) une base orthonormée quelconque de E. En déduire que $\det\mathrm{G}\geqslant 0$, avec égalité si et seulement si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée.

Exercice 24 (⋆)

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Montrer l'existence de scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et de vecteurs unitaires $(u_1,\dots,u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{A}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$.

Exercice 25 (⋆)

Soit E un espace euclidien et $u\in\mathcal{S}(\mathrm{E})$ un endomorphisme autoadjoint.

a. Montrer que l'application $x\mapsto \dfrac{\langle u(x)\mid x\rangle}{\|x\|^2}$ atteint sur $\mathrm{E}\setminus\{0\}$ un minimum et un maximum, qu'on exprimera à l'aide des valeurs propres de u. Pour quels vecteurs de E ces extremums sont-ils atteints ?

b. En déduire la valeur maximale pour $(x_1,\dots,x_n)\neq(0,\dots,0)$ de la quantité $\phi(x_1,\dots,x_n)=\dfrac{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2=1}$.

Exercice 26 (⋆⋆)

Soit E un espace euclidien et u et v deux endomorphismes autoadjoints qui commutent : $u\circ v=v\circ u$.
Soit λ une valeur propre de u, et E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par v, et que la restriction de v à E_λ est un endomorphisme autoadjoint de E_λ.
En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que $\mathrm{Mat}_e(u)$ et $\mathrm{Mat}_e(v)$ soient diagonales.

Exercice 27 (⋆⋆)

Soit u un endomorphisme autoadjoint positif d'un espace euclidien. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2=u$.

Exercice 28 (⋆)

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det\mathrm{A})^{1/n}\leqslant\dfrac{\mathrm{tr}(\mathrm{A})}{n}$.

Exercice 29 (⋆⋆)

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle positive, et $\mathrm{U}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.
Montrer que $|\mathrm{tr}(\mathrm{AU})|\leqslant\mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Exercice 30 (∗∗∗)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive.

a. Montrer que $\langle X \mid Y \rangle = X^T AY$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b. En appliquant la méthode de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer l'existence d'une matrice triangulaire supérieure M telle que $A = M^T M$.

c. En déduire que $\det A \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 31 (∗∗)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint tel que $\operatorname{tr} u = 0$.

a. Montrer l'existence d'un vecteur non nul $x \in E$ tel que $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$.

b. En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle u(e_i) \mid e_i \rangle = 0$. Que dire de la matrice associée à u dans la base (e) ?

Exercice 32 (∗)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant : $A^T = -A$.

a. Déterminer le spectre de A. À quelle condition cette matrice est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que Im A et Ker A sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et en déduire que rg(A) est un entier pair.