Réduction des endomorphismes

Éléments propres

Exercice 1 (∗)

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $u(P) = (X-a)P' + P$.

Exercice 2 (∗)

Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme définie par $\phi(M) = M^T$. Déterminer les éléments propres (valeurs et sous-espaces propres) de ϕ.

Exercice 3 (∗)

On appaelle *matrice stochastique* une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

- pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \in [0,1]$;
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

a. Montrer que 1 est valeur propre de A.

b. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 4 (∗)

Soit A la matrice d'un projecteur, et $\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(AM+MA\right) \end{array}\right)$.

a. Justifier l'existence de $r \in [\![0,n]\!]$ et de $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

b. Déterminer les éléments propres de ϕ. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Exercice 5 (∗∗)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $a_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$

a. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

b. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 (∗∗)

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & O & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{où } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{1,n\} \text{ ou } j \in \{1,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Polynôme caractéristique

Exercice 7 (∗)

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $M = CC^T$.

Quel est le rang de M ? En déduire le polynôme caractéristique de M. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 2. Exprimer le polynôme caractéristique de u en fonction de $\operatorname{tr} u$ et de $\operatorname{tr}(u^2)$.

Exercice 9 (∗∗)

Soit $n \geqslant 2$ un entier, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne non nul. Soit la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & C^T \\ \hline C & O_{n-1} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Déterminer le rang de A et en déduire que X^{n-2} divise le polynôme caractéristique de A.

b. Montrer que $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - \alpha X - \beta)$ où β est une constante que l'on exprimera à partir de C.

c. Montrer que si $\beta = 0$ la matrice A n'est pas diagonalisable.

d. On suppose $\beta \neq 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 10 (∗∗)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la matrice $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

a. Montrer que $\chi_{A_{n+1}}(X) = (X - n)\chi_{A_n}(X) - X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

b. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(-1)^{n+k}\chi_{A_n}(k) > 0$.

c. En déduire que chaque intervalle $]0,1[$, $]1,2[$, …, $]n-1,+\infty[$ contient exactement une valeur propre de A_n.

Diagonalisation

Exercice 11 (∗)

Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ pour lesquelles la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 12 (∗)

Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$f(M) = (\operatorname{tr} A)M - (\operatorname{tr} M)A.$$

Déterminer les éléments propres de f. f est-il diagonalisable ? Et lorsque $\operatorname{tr} A = 0$?

Exercice 13 (∗)

On considère la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} O & -I_n \\ \hline I_n & O \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{K})$.

Calculer A^2. La matrice A est-elle diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? et lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Exercice 14 (∗)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.
Quelles sont les valeurs propres de A ? Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ lorsque $m = 2$.

Exercice 15 (∗)

a. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice associée à u prend la forme suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} u \neq 0$.

b. Soient $u_1, \dots, u_n$ des réels non nuls, et $\mathrm{A} = \left(\dfrac{u_i}{u_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 16 (∗)

On considère deux réels *distincts* α et β tels que $u^2 - (\alpha+\beta)u + \alpha\beta\mathrm{Id} = 0$. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(u - \alpha\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \beta\mathrm{Id})$, et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 17 (∗∗∗)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{O} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A. Si A est diagonalisable, en est-il de même de B ?

Exercice 18 (∗∗)

Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que si M est diagonalisable il en est de même de C.

b. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 19 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme diagonalisable.
Montrer qu'il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $\left(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{n-1}(a)\right)$ soit une base de E si et seulement si u possède n valeurs propres distinctes.

Projecteurs spectraux

Exercice 20 (∗)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P.

b. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$. Justifier que la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est diagonale.

c. En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

Exercice 21 (∗)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, de valeurs propres -1 et 2. Exprimer A^n en fonction de A et I_p.
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de valeurs propres 0, 1 et 2. Exprimer A^n en fonction de I, A et A^2.

Commutant d'un endomorphisme

Exercice 22 (⁎⁎)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$.

Exercice 23 (⁎)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes non nuls, et a et b deux nombres complexes (avec $a \neq 0$) tels que $f \circ g - g \circ f = af + bg$. Le but de l'exercice est de montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.
Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\phi_g : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ en posant $\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u$.

Dans les deux premières questions on suppose $b = 0$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_g(f^n) = naf^n$, et en déduire l'existence d'un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g, et en déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.

Dans la dernière question on suppose $b \neq 0$.

c. Calculer $\phi_g(h)$ avec $h = af + bg$, et en déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 24 (⁎⁎)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = M$. Montrer que $(\operatorname{tr} A)^3 = n$.

Exercice 25 (⁎⁎)

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ espaces vectoriel E de dimension finie vérifiant $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v possèdent un vecteur propre en commun, et en déduire l'existence d'une base (e) sur laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{(e)}(v)$ sont toutes deux triangulaires supérieures (on pourra raisonner par récurrence sur $\dim E$ pour prouver le second point).

Trigonalisation

Exercice 26 (⁎)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où λ et μ sont des valeurs à déterminer.
En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 27 (⁎⁎)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 28 (⁎⁎⁎)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que la matrice P(A) soit nilpotente.

Exercice 29 (⁎⁎⁎)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ et $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) = 2$. Montrer l'existence d'une base (e) dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 30 ($\star\star$)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

a. Donner un exemple d'un tel endomorphisme en dimension 2, par exemple en trouvant une matrice 2×2 vérifiant $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}$.

b. Montrer que u n'a pas de valeurs propres réelles, et en déduire que la dimension de E est paire.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel stable par u.

d. Montrer que si $\dim \mathrm{E} \geqslant 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_n, u(e_n))$ soit une famille libre de E (procéder par récurrence).

e. En déduire l'existence d'une base (b) pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(b)}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & -\mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \end{array}\right)$.

Suites récurrentes linéaires

Exercice 31 ($\star$)

On considère la suite u définie par les données initiales $u_0 = 1 + \cos\theta$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4 + \cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$, et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} + 2(1 - \cos\theta)u_{n+2} + (1 - 4\cos\theta)u_{n+1} + 2u_n = 0$.
Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 32 ($\star$)

On considère deux urnes A et B, chacune contenant initialement deux jetons : l'un portant la valeur 0 et l'autre la valeur 1. On effectue successivement des échanges qui consistent à échanger un jeton pris au hasard dans l'urne A avec un jeton pris au hasard dans l'urne B. On note Z_n la variable aléatoire égale à la somme des valeurs des jetons contenus dans l'urne A après avoir effectué n échanges. On contiendra que Z_0 est égale à 1. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0)$, $b_n = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 1)$ et $c_n = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 2)$.

a. Établir une relation matricielle liant les vecteurs $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$.

b. Déterminer la limite des suites (a_n), (b_n) et (c_n), puis la limite de la suite $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_n)$.