Algèbre linéaire

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (∗)

Soit $E = \mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $H = \left\{ f \in E \,\middle|\, f(0) = f'(0) = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E, et en trouver un supplémentaire.

Exercice 2 (∗∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_k \subset F_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tel que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = E$ (procéder par récurrence en commençant par traiter le cas $n = 2$).

Exercice 3 (∗∗)

Soit E un espace vectoriel, et H_1 et H_2 deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = H_1 \oplus H_2$.
Pour tout $k \in \{1,2\}$ on pose $\mathcal{H}_k = \left\{ u \in \mathcal{L}(E) \,\middle|\, \operatorname{Im} u \subset H_k \right\}$. Montrer que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}(E)$.

Projections vectorielles

Exercice 4 (∗)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.
Montrer que $v \circ u$ est une projection vectorielle, puis que $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

Exercice 5 (∗)

Soit E un espace vectoriel, et p et q deux projections vectorielles qui commutent. Montrer que $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 6 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projections vectorielles sur un même sous-espace H. Montrer que quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $u = \lambda p + (1-\lambda)q$ est une projection vectorielle sur H.

Exercice 7 (∗∗)

Quelles sont les droites vectorielles stables par un projecteur ? En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie impaire et p et q deux projections vectorielles alors il existe une droite vectorielle stable à la fois par p et par q.

Familles génératrices, familles libres, bases

Exercice 8 (∗)

On considère une famille libre $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ d'un espace vectoriel E, et on définit la famille de vecteurs $(v_1,\dots,v_n)$ en posant : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $v_k = u_k + u_{k+1}$ et $v_n = u_n + u_1$. Étudier la liberté de la famille $(v_1,\dots,v_n)$.

Exercice 9 (∗)

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $(f_1,\dots,f_n)$ une famille libre de E. Montrer que la famille $(f_1',\dots,f_n')$ est au moins de rang $n-1$.

Exercice 10 (⁎⁎)

Soit E un espace vectoriel, $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires. On pose $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ et $x_i' = x_i + y$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Étudier à quelle condition la famille $(x_1',\dots,x_n')$ est libre.

Exercice 11 (⁎)

Soit E un espace vectoriel, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que pour tout $x\in\mathrm{E}$, la famille $\big(x,u(x)\big)$ est liée. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice 12 (⁎⁎)

Soit E un espace vectoriel et $(v_1,\dots,v_n)\in\mathrm{E}^n$.
On note V le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\left\{v_i-v_j \,\middle|\, (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\right\}$. Montrer que $\dim \mathrm{V}\leqslant n-1$.

Applications linéaires

Exercice 13 (⁎⁎)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On pose :

$$\mathcal{A}=\left\{v\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}) \,\middle|\, u\circ v\circ u=0\right\}.$$

a. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

b. Justifier l'existence d'une base (e) de E et d'une base (f) de F telles que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{I}_r & \mathrm{O}\\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O}\end{array}\right)$.

c. On note M la matrice définie ci-dessus. Pour $v\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$, on pose $\mathrm{N}=\mathrm{Mat}_{f,e}(v)$. À quelle condition, portant sur N, a-t-on $v\in\mathcal{A}$? En déduire la dimension de $\mathcal{A}$.

Exercice 14 (⁎)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose l'existence de $x_0\in\mathrm{E}$ tel que la famille $(e)=\big(x_0,u(x_0),\cdots,u^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.
Soit $v\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u\circ v=v\circ u$. Montrer l'existence de scalaires $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tels que

$$v=a_0\mathrm{Id}_\mathrm{E}+a_1u+a_2u^2+\cdots a_{n-1}u^{n-1}.$$

Indication. On pourra considérer la décomposition du vecteur $v(x_0)$ dans la base (e).

Exercice 15 (⁎⁎⁎)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a. Montrer que pour tout projecteur p de E, $\mathrm{tr}(p)=\mathrm{rg}(p)$.

On considère désormais un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^m=\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, et on pose $p=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}u^k$.

b. Montrer que p est un projecteur de E (on pourra commencer par calculer $p\circ u$).

c. En déduire que $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{tr}(u^k)=\dim\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$.

Trace d'un endomorphisme

Exercice 16 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} u = 1$. Montrer que $u^2 = (\operatorname{tr} u)u$, puis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = (\operatorname{tr} u)^{k-1} u$.

Exercice 17 (∗)

Soit u une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$). Montrer l'existence d'une matrice A telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $u(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

Exercice 18 (∗∗)

Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(M) = M^T$.

Exercice 19 (∗∗∗)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle vérifiant $\operatorname{tr} M = 0$.

a. Montrer qu'il existe $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1.

b. En déduire que M est semblable à une matrice de la forme

$$N = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \text{où } M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ vérifie } \operatorname{tr} M_1 = 0.$$

c. Montrer alors que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

Image et noyau d'une application linéaire

Exercice 20 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\} \iff \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$ et $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u \iff \operatorname{Im} u = \operatorname{Im}(u^2)$.

Exercice 21 (∗)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $\dim H_1 + \dim H_2 = \dim E$ si et seulement s'il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $H_1 = \operatorname{Ker} u$ et $H_2 = \operatorname{Im} u$.

Exercice 22 (∗∗)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r telle que $A^2 = 0$.

Montrer que $r \leqslant n/2$ puis que A est semblable à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Exercice 23 (∗)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, H un sous-espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim u(H) \geqslant \dim H - \dim(\operatorname{Ker} u)$.

Exercice 24 ($\ast$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v).$$

Indication. Considérer la restriction w de u à $\operatorname{Ker}(u+v)$.

Exercice 25 ($\ast\ast$)

Soient E, F, G et H quatre espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $h \in \mathcal{L}(G,H)$. Montrer que :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) + \operatorname{rg}(h \circ g) \leqslant \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(h \circ g \circ f)$$

Exercice 26 ($\ast\ast\ast$)

Soit $A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\operatorname{rg}(M) \geqslant r$.

b. Montrer que $\operatorname{rg} M = r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

Sous-espaces stables

Exercice 27 ($\ast$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $B = \begin{pmatrix} \boxed{O_n} & \boxed{A} \\ \boxed{I_n} & \boxed{O_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que B est inversible si et seulement si A l'est, et calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 28 ($\ast$)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 29 ($\ast$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ (u - \beta \mathrm{Id}_E) = 0$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $\alpha \neq \beta$. On pose $H_1 = \operatorname{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$ et $H_2 = \operatorname{Ker}(u - \beta \mathrm{Id}_E)$.

Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par u, puis que $E = H_1 \oplus H_2$.
Que dire de la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition ? Montrer que $u = \alpha p + \beta(\mathrm{Id}_E - p)$, où p est la projection vectorielle sur H_1 parallèlement à H_2.

Exercice 30 ($\ast\ast$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c'est à dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$).

Établir que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$.
Établir que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, puis justifier que la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition est triangulaire à coefficients diagonaux nuls.

Exercice 31 (⁎⁎)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = \mathrm{Id}$, $g^2 = \mathrm{Id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a. Montrer que E est de dimension paire. On pose $\dim(\mathrm{E}) = 2p$.

b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_p \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 32 (⁎⁎⁎)

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $u(e_k) = e_{k+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

Exercice 33 (⁎⁎)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $\big(x, u(x)\big)$ est liée.

b. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui laissent stable tout hyperplan de E.

Déterminants

Exercice 34 (⁎)

Calculer le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 35 (⁎)

Calculer le déterminant d'ordre $n+1$: $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

Exercice 36 (⁎)

Soient $(a) = (a_1,\dots,a_n)$ et $(b) = (b_1,\dots,b_n)$ deux n-uplets de $\mathbb{K}^n$.

On note $\mathrm{M} = (m_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $m_{ij} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ a_i & \text{sinon} \end{cases}$. En utilisant la linéarité du déterminant vis-à-vis de chacune de ses colonnes, calculer $\det \mathrm{M}$.