Suites et séries de fonctions (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Prouver la continuité de f sur son ensemble de définition.

c) Prouver la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

e) Donner un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Justifier que f est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n>1}$ une suite à valeurs strictement positive. On définit $\mathcal{D}_u = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum u_n n^\alpha \text{ converge}\right\}$.

a) Montrer que si $\beta \in \mathcal{D}_u$ alors $]-\infty,\beta[\subset \mathcal{D}_u$.

b) Montrer que $\mathcal{D}_u$ vérifie l'une des assertions suivantes :

$$(i)\quad \mathcal{D}_u = \varnothing \qquad (ii)\quad \mathcal{D}_u = \mathbb{R} \qquad (iii)\quad \mathcal{D}_u =]-\infty,\gamma[\text{ où } \gamma \in \mathbb{R} \qquad (iv)\quad \mathcal{D}_u =]-\infty,\gamma] \text{ où } \gamma \in \mathbb{R}$$

c) Donner des exemples pour les quatre cas.

On suppose que $\mathcal{D}_u$ est de la forme $]-\infty,\gamma[$ et on définit ϕ sur $\mathcal{D}_u$ par $\phi(\alpha) = \sum u_n n^\alpha$.

d) Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

e) Calculer la limite de $\phi(\alpha)$ lorsque α tend vers γ par valeurs inférieures.