Suites et séries de fonctions (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

a) Notons $u_n : x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$. On a $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc la convergence de la série est normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$, ce qui assure que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f étant paire, sa dérivée en 0, si elle existe, est nécessairement nulle. Intéressons nous à la limite en 0^+ de $\frac{f(x)}{x}$. Sachant que $\lim_0 \frac{\sin t}{t} = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \alpha]$, $\frac{\sin t}{t} \geqslant \frac{1}{2}$.

Pour tout $x > 0$, posons $N = \lfloor \alpha/x \rfloor$. Alors pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $nx \in]0, \alpha]$ et donc $\frac{f(x)}{x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2(nx)}{n^2 x} \geqslant \frac{Nx}{4}$.

Or $N > \frac{\alpha}{x} - 1$ donc $\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{\alpha - x}{4}$. Cette inégalité prouve que $\frac{f(x)}{x}$ ne peut tendre vers 0 en 0^+ donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Prouver la continuité de f sur son ensemble de définition.

c) Prouver la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

e) Donner un équivalent de f au voisinage de 0.

On note pour tout $n \geqslant 1$, $f_n : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

a) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, $f(0)$ est définie car somme de la série nulle. Si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum f_n(x)$ converge absolument. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $a > 0$. Sur $[-a, a]$ on a $|f_n(x)| \leqslant \frac{|x|}{n^2} \leqslant \frac{a}{n^2}$ (car pour tout $t \geqslant 0$, $\arctan t \leqslant t$). La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$. Les fonctions f_n étant continues, la fonction f est continue sur tout segment $[-a, a]$ puis par recouvrement sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_n'(x) = \frac{n^2}{n^4 + x^2}$. Sur $\mathbb{R}$ on a donc $\|f_n'\|_\infty = \frac{1}{n^2}$. La série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$; il en résulte que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$.

d) $\lim_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$ donc il existe un réel A tel que pour $t \geqslant A$, $\arctan t \geqslant 1$. Ainsi, lorsque $n \leqslant \sqrt{\frac{x}{A}}$ on a $\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \geqslant 1$. On en déduit que $f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{\lfloor\sqrt{x/A}\rfloor} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \geqslant \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{A}} \right\rfloor$, puis que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par minoration.

e) $\arctan t - t \underset{0}{=} o(t^2)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que pour $t \in [-\eta, \eta]$, $|\arctan t - t| \leqslant t^2$.

Pour $|x| \leqslant \eta$ on a donc $\left| f(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^4}$, ce qui prouve que $f(x) - \frac{\pi^2}{6} x \underset{0}{=} O(x^2)$ et donc que $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi^2}{6} x$.

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Justifier que f est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Posons $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$. $f_n(0) = (-1)^n$ ne tend pas vers 0 donc f n'est pas définie en 0. Si $x \neq 0$ alors $f_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b) Soit $\alpha > 0$. Sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ on a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{1+n^2\alpha^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la convergence de $\sum f_n$ est normale donc uniforme sur $[\alpha,+\infty[$. Puisque les fonctions f_n sont continue sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que f est continue sur $[\alpha,+\infty[$, puis sur $]0,+\infty[$ par recouvrement.

c) Pour $x > 0$ fixé, la suite $\big(|f_n(x)|\big)_n$ est décroissante et tend vers 0 donc d'après le critère spécial relatif aux séries alternées, $|f(x)| \leqslant |f_n(x)| = \frac{1}{1+x^2}$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ il en est de même de f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$, et $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \left[\frac{(-1)^n}{n}\arctan(nx)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{n}$.

Notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$. Puisque f est intégrable il en est de même de R_n, et

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k} + \int_0^{+\infty} R_n(x)\,dx.$$

Toujours d'après le critère spécial, $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2} = \phi(x)$. La suite de fonctions (R_n) converge simplement vers la fonction nulle et ϕ est continue par morceaux et intégrable donc d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} R_n(x)\,dx = 0$, ce qui prouve que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Posons $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$. On a $H_{2n} + S_{2n} = 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p} = H_n$ donc $S_{2n} = H_n - H_{2n}$. Or on sait que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ donc $S_{2n} = \ln n - \ln(2n) + o(1) = -\ln 2 + o(1)$, ce qui prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à valeurs strictement positive. On définit $\mathcal{D}_u = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum u_n n^\alpha \text{ converge}\right\}$.

a) Montrer que si $\beta \in \mathcal{D}_u$ alors $]-\infty,\beta[\subset \mathcal{D}_u$.

b) Montrer que $\mathcal{D}_u$ vérifie l'une des assertions suivantes :

(i) $\mathcal{D}_u = \varnothing$ $\quad(ii)$ $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$ $\quad(iii)$ $\mathcal{D}_u =]-\infty,\gamma[$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ $\quad(iv)$ $\mathcal{D}_u =]-\infty,\gamma]$ où $\gamma \in \mathbb{R}$

c) Donner des exemples pour les quatre cas.

On suppose que $\mathcal{D}_u$ est de la forme $]-\infty,\gamma[$ et on définit ϕ sur $\mathcal{D}_u$ par $\phi(\alpha) = \sum u_n n^\alpha$.

d) Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

e) Calculer la limite de $\phi(\alpha)$ lorsque α tend vers γ par valeurs inférieures.

a) Si $\alpha < \beta$ alors $0 \leqslant u_n n^\alpha \leqslant u_n n^\beta$ donc $\sum u_n n^\beta$ converge $\implies \sum u_n n^\alpha$ converge.

b) Supposons $\mathcal{D}_u$ différent de $\varnothing$ et de $\mathbb{R}$. il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathcal{D}_u$, et d'après la question précédente, α majore $\mathcal{D}_u$. Cet ensemble est donc non vide et majoré : il possède une borne supérieure γ.
Soit maintenant $\alpha < \gamma$. α ne majore pas $\mathcal{D}_u$ donc il existe $\beta \in \mathcal{D}_u$ tel que $\alpha < \beta$, et d'après la question précédente, $\alpha \in \mathcal{D}_u$. On a donc prouvé que $]-\infty,\gamma[\subset \mathcal{D}_u$, ce qui correspond aux cas (iii) et (iv).

c) Pour $u_n = n!$, $\mathcal{D}_u = \varnothing$ (critère de d'Alembert). Pour $u_n = \frac{1}{n!}$, $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$ (toujours d'après le critère de d'Alembert).

Pour $u_n = 1$, $\mathcal{D}_u =]-\infty, -1[$ (série de Riemann). Enfin, pour $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^2}$, $\mathcal{D}_u =]-\infty, -1]$ (série de Bertrand).

d) Notons $f_n : \alpha \mapsto u_n n^\alpha$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f_n^{(k)}(\alpha) = (\ln n)^k u_n n^\alpha$. Soit $\beta < \gamma$. Sur l'intervalle $]-\infty, \beta]$, $\|f_n^{(k)}\|_\infty = (\ln n)^k u_n n^\beta = \mathrm{O}(u_n n^\delta)$ avec $\beta < \delta < \gamma$. Puisque $\delta \in \mathcal{D}_u$ on en déduit que la convergence de $\sum f_n^{(k)}$ est normale, donc uniforme sur $[-\infty, \beta]$. Ceci montre que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, \beta]$, puis par recouvrement sur $\mathcal{D}_u$.

e) La fonction ϕ est croissante, donc ϕ possède une limite, finie ou infinie, en γ. Supposons cette limite ℓ finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}_u$, $\sum_{k=1}^{n} u_k n^\alpha \leqslant \phi(\alpha) \leqslant \ell$. En faisant tendre α vers γ on obtient : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} u_n n^\gamma \leqslant \ell$. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n n^\gamma$ sont majorées donc la série converge, ce qui signifie que $\gamma \in \mathcal{D}_u$, ce qui est absurde. On en déduit que $\lim\limits_{\gamma} \phi(\alpha) = +\infty$.