Suites et séries numériques (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 pour que cette suite soit bornée.

Exercice 2 Soit $(b_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par $b_1 = 2$ et $b_n = b_{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$ pour $n \geqslant 2$. Trouver un équivalent de b_n.

Exercice 3 Soit (a_n) une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim a_n = +\infty$.
Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective.
Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{f(n)}{n^2}$.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 6 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\tan\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$.

Exercice 7 Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs tels que $\sum u_n$ converge.
Montrer que $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *(déjà vu mais essentiel).*

Exercice 8 Soit (u_n) une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathrm{E}_p = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_n \geqslant \dfrac{1}{p} \right\}$.

a) L'ensemble E_p est-il fini ?

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_p = \mathrm{card}\, \mathrm{E}_p$. Montrer que $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{a_p}{p} = 0$ *(utiliser le résultat de l'exercice précédent).*