SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES (COMPLÉMENT POUR 5/2)

Exercice 1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 pour que cette suite soit bornée.

On a $\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{u_n}{n!} - \dfrac{n+2}{(n+1)!}$ donc par télescopage $\dfrac{u_n}{n!} = \dfrac{u_0}{0!} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k+2}{(k+1)!}$.

On a donc $u_n = n!\Big(u_0 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{(k+1)!}\Big)\Big) = n!\Big(u_0 + 1 - \dfrac{1}{n!} - 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}\Big)$.

Ainsi, $u_n = -1 + n!\Big(u_0 + 1 - 2\mathrm{e} + 2\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}\Big)$.

Le terme entre parenthèses converge vers $u_0 + 1 - 2\mathrm{e}$ donc si $u_0 \neq 2\mathrm{e}-1$ la suite (u_n) diverge (vers $\pm\infty$) et n'est donc pas bornée.

Si $u_0 = 2\mathrm{e}-1$ alors $u_n = -1 + 2n!\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}$. Or pour tout $k \geqslant n+2$, $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)n!}$ donc $1 \leqslant n!\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k!} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1} + \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty}\dfrac{1}{k(k-1)} = 1 + \dfrac{2}{n+1}$.

Ceci prouve que $\lim u_n = 1$ donc que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 2 Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $b_1 = 2$ et $b_n = b_{\lfloor n/2\rfloor} + 1$ pour $n \geqslant 2$. Trouver un équivalent de b_n.

Montrons par récurrence que $b_n \leqslant b_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

- On a $b_1 = 2$ et $b_2 = b_1 + 1 = 3$ donc $b_1 \leqslant b_2$.
- Si $n \geqslant 3$, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$.
  Si n est pair alors $\lfloor (n+1)/2\rfloor = \lfloor n/2\rfloor$ donc $b_n = b_{n+1}$.
  Si n est impair alors $\lfloor (n+1)/2\rfloor = \lfloor n/2\rfloor + 1$ et par hypothèse de récurrence $b_{\lfloor n/2\rfloor} \leqslant b_{\lfloor (n+1)/2\rfloor}$ donc $b_n \leqslant b_{n+1}$. La récurrence se propage.

La suite (b_n) est donc croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier p tel que $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$. On en déduit que $b_{2^p} \leqslant b_n \leqslant b_{2^{p+1}}$. Or $b_{2^k} = b_{2^{k-1}} + 1$ donc par une récurrence évidente $b_{2^k} = b_{2^0} + k = 2 + k$. Ainsi, $p + 2 \leqslant b_n \leqslant p + 3$. On en déduit que $b_n \sim p$. Mais $p = \lfloor \log_2 n\rfloor \sim \log_2 n$ donc en définitive $b_n \sim \log_2 n$.

Exercice 3 Soit (a_n) une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim a_n = +\infty$.
Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$?

Commençons par deviner le résultat en essayant avec quelques suites a_n. Par exemple, pour $a_n = n^\alpha$ ($\alpha > 0$) on a $\dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = 1 - \Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)^\alpha \sim \dfrac{\alpha}{n}$ donc la série diverge. On va montrer que ce résultat est général.

Supposons au contraire que la série de terme général $u_n = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$ converge. On a $\lim u_n = 0$ donc $\ln(1-u_n) \sim u_n$.

S'agissant d'un terme positif on en déduit que la série $\sum \ln(1-u_n)$ converge.

Mais $\ln(1-u_n) = \ln(a_{n-1}) - \ln(a_n)$ donc par télescopage la suite $(\ln a_n)$ converge, ce qui est absurde. On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective.
Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{f(n)}{n^2}$.

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{f(k)}{k^2}$. On a $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{f(k)}{k^2} \geqslant \dfrac{1}{4n^2}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f(k)$.

$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f(k)$ est une somme de n entiers distincts donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et ainsi, $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{n-1}{8n}$. Cette minoration montre que $(S_{2n} - S_n)$ ne peut tendre vers 0 et donc que la suite (S_n) ne converge pas : ainsi, la série diverge.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.
Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Posons $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. L'hypothèse se traduit par : $v_{2n} - v_n \leqslant \dfrac{1}{n} v_n$, soit $v_{2n} \leqslant \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) v_n$.

Pour $n = 2^p$ on obtient par récurrence : $v_{2^p} \leqslant \Big(1 + \dfrac{1}{2^0}\Big)\cdots\Big(1 + \dfrac{1}{2^p}\Big) v_1$. Posons $w_p = \displaystyle\prod_{k=0}^{p}\Big(1 + \frac{1}{2^k}\Big)$. On a $\ln w_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \ln\Big(1 + \frac{1}{2^k}\Big)$. Mais $\ln\Big(1 + \dfrac{1}{2^k}\Big) \sim \dfrac{1}{2^k}$ donc la série $\sum \ln\Big(1 + \dfrac{1}{2^k}\Big)$ converge, ce qui montre que la suite $(\ln w_p)$ converge. Ainsi, la suite (w_p) converge, ce qui montre que la suite (v_{2^p}) est majorée par un réel B.
Mais la suite (v_n) est croissante (car u_n est supposée positive) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier p tel que $n \leqslant 2^p$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \mathrm{B}$. La suite (v_n) est croissante et majorée, elle converge, ce qui prouve la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 6 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\bigg(\tan\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\Big)\bigg)$.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ donc, en posant $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ on a

$$u_n = \ln\Big(\tan\Big(\frac{\pi}{4} - r_n\Big)\Big) = \ln\Big(\frac{1 - \tan r_n}{1 + \tan r_n}\Big) = \ln(1 - \tan r_n) - \ln(1 + \tan r_n).$$

Sachant que $\lim r_n = 0$ on a $\tan r_n = r_n + \mathrm{O}(r_n^3)$ et $\ln(1-x) - \ln(1+x) \underset{0}{=} -2x + \mathrm{O}(x^3)$ donc $u_n = -2r_n + \mathrm{O}(r_n^3)$.
D'après le critère spécial, $|r_n| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$ donc $r_n^3 = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$. Il en résulte que la série $\sum (u_n + 2r_n)$ converge et donc que les série $\sum u_n$ et $\sum r_n$ sont de même nature.
La série $\sum r_n$ est alternée car r_n est de même signe que son premier terme $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. De plus,

$$\begin{aligned}|r_{n+1}| - |r_n| &= (-1)^{n+2} r_{n+1} - (-1)^{n+1} r_n = (-1)^n\Big(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\Big)\\ &= (-1)^n\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\Big) = (-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)}.\end{aligned}$$

Le critère spécial permet maintenant d'affirmer que $|r_n| - |r_{n+1}|$ est du signe de $\dfrac{2(-1)^{2n+1}}{(2n+3)(2n+5)} < 0$ donc que la suite $|r_n|$ décroît.
Enfin, la suite (r_n) tend vers 0 donc le critère spécial permet de conclure : la série $\sum r_n$ (et donc $\sum u_n$) converge.

Exercice 7 Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs tels que $\sum u_n$ converge.
Montrer que $u_n = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ *(déjà vu mais essentiel)*.

On a $0 \leqslant nu_{2n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. La série converge et les deux bornes tendent vers $+\infty$ donc $\lim \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = 0$. On en déduit que $\lim(2nu_{2n} = 0$.
Par ailleurs, $0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant \dfrac{2n+1}{2n} \times (2nu_{2n})$ donc $\lim(2n+1)u_{2n+1} = 0$. On peut conclure : $\lim nu_n = 0$.

Exercice 8 Soit (u_n) une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathrm{E}_p = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_n \geqslant \dfrac{1}{p} \right\}$.

a) L'ensemble E_p est-il fini ?

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_p = \operatorname{card} \mathrm{E}_p$. Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{a_p}{p} = 0$ *(utiliser le résultat de l'exercice précédent)*.

a) La suite (u_n) tend vers 0 donc il existe un rang à partir duquel $u_n < \dfrac{1}{p}$, ce qui prouve que E_p est fini.

b) Puisque la suite (u_n) est supposée décroissante, $\mathrm{E}_p = [\![0, a_p - 1]\!]$; autrement dit, pour tout $n < a_p$ on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{p}$ et pour tout $n \geqslant a_p$, $u_n < \dfrac{1}{p}$.

D'après l'exercice précédent, $\lim n u_n = 0$: pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N à partir duquel $u_n < \dfrac{\epsilon}{n}$.

Considérons un entier $p \geqslant \dfrac{\mathrm{N}}{\epsilon}$. Pour tout $n \geqslant \epsilon p \geqslant \mathrm{N}$ on a $u_n < \dfrac{\epsilon}{n} \leqslant \dfrac{1}{p}$ donc $n \notin \mathrm{E}_p$. Ceci montre que $a_p \leqslant \epsilon p$.

Nous avons montré que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel $\dfrac{a_p}{p} \leqslant \epsilon$, autrement dit $\lim \dfrac{a_p}{p} = 0$.