Séries entières (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit (u_n) une suite bornée, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Déterminer les rayons de convergence de $\mathrm{U}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{k!} x^k$ et $\mathrm{S}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_k}{k!} x^k$.

b) Trouver une relation entre U′, S et S′.

c) On suppose que (s_n) tend vers une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$. Montrer qu'alors $e^{-x}\mathrm{S}(x)$ tend vers une limite à préciser quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \mathrm{tr}(\mathrm{A}^n) z^n$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Exercice 3 On considère le problème de Cauchy $y'' + xy' + y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

a) On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Si $\sum a_n x^n$ est solution de l'équation différentielle, donner la relation de récurrence liant les termes de la suite (a_n).

b) Expliciter a_n en fonction de n, et donner alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

c) Expliciter $\sum a_n x^n$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 4 Soit $(a_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+3}}{a_n} \right| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Déterminer le rayon de convergence de $\mathrm{S} = \sum a_n z^n$.

Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_1 = 1$.

a) Montrer que $\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k$.

b) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{\mathrm{B}_n}{n!} x^n$ est strictement positif.

c) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

d) En déduire une expression de B_n sous la forme d'une série.

Exercice 6 Calculer $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$ à l'aide de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.