Séries entières (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit (u_n) une suite bornée, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Déterminer les rayons de convergence de $U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{k!} x^k$ et $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_k}{k!} x^k$.

b) Trouver une relation entre U', S et S'.

c) On suppose que (s_n) tend vers une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$. Montrer qu'alors $e^{-x}S(x)$ tend vers une limite à préciser quand x tend vers $+\infty$.

a) (u_n) est bornée donc $\frac{u_k}{k!}x^k = O\Big(\frac{x^k}{k!}\Big)$. le rayon de convergence de $\sum \frac{u_k}{k!}x^k$ est égal à $+\infty$.

$s_n = O(n)$ donc $\frac{s_k}{k!}x^k = O\Big(\frac{x^k}{(k-1)!}\Big)$. le rayon de convergence de $\sum \frac{s_k}{k!}x^k$ est égal à $+\infty$.

b) $U'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s_k - s_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s_k}{(k-1)!}x^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_k}{k!}x^k = S'(x) - S(x)$.

c) Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang N à partir duquel $|s_n - \ell| \leqslant \epsilon/2$. Alors :

$$|S(x) - \ell\, e^x| = \Big|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_k - \ell}{k!}x^k\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|s_k - \ell|}{k!}x^k + \frac{\epsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|s_k - \ell|}{k!}x^k + \frac{\epsilon}{2}e^x$$

donc $|e^{-x}S(x) - \ell| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|s_k - \ell|}{k!}x^k e^{-x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$ ce majorant tend vers $\frac{\epsilon}{2}$ donc il existe $A > 0$ tel que $x \geqslant A \Longrightarrow |e^{-x}S(x) - \ell| \leqslant \epsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{+\infty} e^{-x}S(x) = \ell$.

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \mathrm{tr}(A^n)z^n$ et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Posons $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (valeurs propres comptées avec multiplicité). On sait que $\mathrm{tr}(A^n) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n$ (conséquence de la trigonalisation) donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^n)z^n = \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_k z)^n$. Or $\sum (\lambda_k z)^n$ converge et vaut $\frac{1}{1-\lambda_k z}$ si et seulement si $|z| \leqslant \frac{1}{|\lambda_k|}$ donc $R = \frac{1}{\max|\lambda_k|}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^n)z^n = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_k z}$.

Par ailleurs, $\chi_A(z) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)$ donc $\frac{\chi_A'(z)}{\chi_A(z)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{z-\lambda_k}$ et ainsi : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^n)z^n = \frac{\chi_A'(1/z)}{z\chi_A(1/z)}$.

Exercice 3 On considère le problème de Cauchy $y'' + xy' + y = 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

a) On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Si $\sum a_n x^n$ est solution de l'équation différentielle, donner la relation de récurrence liant les termes de la suite (a_n).

b) Expliciter a_n en fonction de n, et donner alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

c) Expliciter $\sum a_n x^n$ à l'aide des fonctions usuelles.

a) On a $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$ soit en ré-indexant la première somme : $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$ et en invoquant l'unicité du développement en série entière on obtient : $2a_2 + a_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$.

b) Sachant que $a_0 = 0$ on a $a_2 = \frac{1}{2}$ et pour tout $p \geqslant 1$, $a_{2p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2p)(2p-2)\cdots(4)}a_2 = \frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}$.
Sachant que $a_1 = 0$ on a pour tout $p \geqslant 0$, $a_{2p+1} = 0$.

La série entière recherchée vaut donc $y(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}x^{2p}$; le critère de d'Alembert donne $\mathrm{R} = +\infty$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^p = 1 - \exp(-x^2/2)$.

Exercice 4 Soit $(a_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+3}}{a_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Déterminer le rayon de convergence de $\mathrm{S} = \sum a_n z^n$.

Considérons les trois séries entières $\mathrm{S}_1 = \sum a_{3n}z^{3n}$, $\mathrm{S}_2 = \sum a_{3n+1}z^{3n+1}$ et $\mathrm{S}_3 = \sum a_{3n+2}z^{3n+2}$. Le critère de d'Alembert appliqué à chacune d'elles montre qu'elles ont toutes trois un rayon de convergence $\mathrm{R} = \sqrt[3]{\ell}$. On en déduit que le rayon de convergence de S est supérieur ou égal à $\sqrt[3]{\ell}$.
Par ailleurs, si on a $|z| > \sqrt[3]{\ell}$ alors la suite $(a_{3n}z^{3n})$ ne converge pas vers 0, donc la suite $(a_n z^n)$ dont elle est extraite non plus. On en déduit que le rayon de convergence de S est égal à $\sqrt[3]{\ell}$.

Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_1 = 1$.

a) Montrer que $\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathrm{B}_k$.

b) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{\mathrm{B}_n}{n!}x^n$ est strictement positif.

c) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!}x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

d) En déduire une expression de B_n sous la forme d'une série.

a) Considérons un ensemble E à $n+1$ éléments, et l'un de ses éléments a. Le nombre de partitions de E pour lesquelles la classe de a contient $k+1$ éléments (avec $k \in [\![1, n]\!]$ est égal à $\binom{n}{k}\mathrm{B}_{n-k}$ donc $\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{B}_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{B}_k$ de par la formule des compléments.

b) On montre par récurrence que $\mathrm{B}_n \leqslant n!$.

- C'est clair pour $n \in \{0, 1\}$.
- Si $n \geqslant 1$, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang n. Alors $\mathrm{B}_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k! = \sum_{k=0} n\frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} ! = (n+1)!$ donc la récurrence se propage.

Ainsi, $\frac{\mathrm{B}_n}{n!} \leqslant 1$, ce qui implique $\mathrm{R} \geqslant 1$.

c) Pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{B}_k}{k!(n-k)!}x^n$.

On reconnait un produit de Cauchy : $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}_n}{n!}x^n\right) = \mathrm{e}^x f(x)$.

d) On en déduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$. Et puisque $f(0) = 1$, $\lambda = 1/\mathrm{e}$ et ainsi, $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.
D'où : $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(kx)^n}{n!k!}$ et si on admet qu'on peut intervertir les deux sommes : $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}$. Par unicité du développement en série entière on en déduit $\mathrm{B}_n = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$.

Exercice 6 Calculer $w_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$ à l'aide de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$.

Le critère de d'Alembert permet de prouver que le rayon de convergence de f est égal à 1/4.

D'après le produit de Cauchy, pour tout $x \in]-1/4, 1/4[$, $f(x)f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$. Nous allons maintenant calculer $f(x)$.

Pour tout $x \in]-1/4, 1/4[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(4n-2)\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(4n+2)\binom{2n}{n}x^n$.

On a donc $f'(x) = 4xf'(x) + 2f(x)$, soit $(1-4x)f'(x) = 2f(x)$. En résolvant cette équation (sachant que $f(0) = 1$) on en déduit que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$, puis que $f(x)f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}$. Il reste à développer en série entière :

$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\cdots\Big(-\frac{1}{2}-n+1\Big)\frac{(-1)^n(16x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1)}{2^n n!}(16x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}(16x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}4^n\binom{2n}{n}x^{2n} \end{aligned}$$

donc $w_{2n+1} = 0$ et $w_{2n} = 4^n\binom{2n}{n}$.