Réduction des endomorphismes (complément pour 5/2)

Les exercices notés d'un obèle † sont de « grands classiques ».

Exercice 1 †

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose f inversible et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a) On suppose g diagonalisable. Montrer que g est de rang pair.

b) On suppose $\operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} g = \mathrm{E}$. Montrer que g est de rang pair.

c) Qu'en est-il dans le cas général ?

a) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(g)$, et $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors $g\big(f(x)\big) = -f\big(g(x)\big) = -f(\lambda x) = -\lambda x$. Puisque f est inversible on a $f(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ et $f(x)$ est vecteur propre pour la valeur propre $-\lambda$.
Sachant que $f \circ g = -g \circ f \iff g \circ f^{-1} = -f^{-1} \circ g$ on démontre de manière analogue que si y est un vecteur propre pour la valeur propre $-\lambda$, alors $f^{-1}(y)$ est vecteur propre pour la valeur λ.
En notant E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de g, ceci montre que l'application $\begin{pmatrix} \mathrm{E}_\lambda & \longrightarrow & \mathrm{E}_{-\lambda} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme. On a donc $\dim \mathrm{E}_\lambda = \dim \mathrm{E}_{-\lambda}$.
Sachant que g est diagonalisable, $\operatorname{rg} g = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(g) \setminus \{0\}} \dim \mathrm{E}_\lambda$, et le résultat précédent permet d'en déduire que $\operatorname{rg} g$ est un entier pair.

b) Si $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = g(x)$ et alors $f(y) = f \circ g(x) == -g \circ f(x) = g\big(f(-x)\big)$ donc $f(y) \in \operatorname{Im} g$. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} g$ est stable par f. De même, $\operatorname{Im} g$ est stable par g, donc on peut définir les induits f_{I} et g_{I} respectivement de f et de g sur $\operatorname{Im} g$:

$$f_{\mathrm{I}} : \begin{pmatrix} \operatorname{Im} g & \longrightarrow & \operatorname{Im} g \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix} \qquad g_{\mathrm{I}} : \begin{pmatrix} \operatorname{Im} g & \longrightarrow & \operatorname{Im} g \\ x & \longmapsto & g(x) \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker} f_{\mathrm{I}} = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_{\mathrm{E}}\}$ car $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et $\operatorname{Ker} g_{\mathrm{I}} = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{0_{\mathrm{E}}\}$ donc f_{I} et g_{I} sont inversibles. On a toujours $f_{\mathrm{I}} \circ g_{\mathrm{I}} = -g_{\mathrm{I}} \circ f_{\mathrm{I}}$ et en passant au déterminant : $\det f_{\mathrm{I}} \times \det g_{\mathrm{I}} = (-1)^r \det g_{\mathrm{I}} \times \det f_{\mathrm{I}}$ où $r = \dim \operatorname{Im} g = \operatorname{rg} g$ donc $(-1)^r = 1$ et $\operatorname{rg} g$ est bien pair.

c) Pour donner un contre-exemple, il commencer par choisir un endomorphisme de rang impair qui ne soit pas diagonalisable, et tel que $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$. En dimension 2, en identifiant matrices et endomorphismes on peut par exemple choisir pour g l'endomorphisme associé à $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est bien de rang impair.

Il faut maintenant associer à f une matrice inversible $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $\mathrm{AB} = -\mathrm{BA}$. Un calcul élémentaire traduit cette dernière condition par les relations $c = 0$ et $a = -b$; il suffit donc de choisir $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir un contre exemple.

Exercice 2 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{M}$. Montrer que $(\operatorname{tr} \mathrm{A})^3 = n$.

$\operatorname{rg} \mathrm{M} = 1$ donc 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ de M. De plus, $\operatorname{tr} \mathrm{M} = n$ donc $\operatorname{Sp}(\mathrm{M}) = \{0, n\}$ et M est diagonalisable, semblable à la matrice D dont tous les coefficients sont nuls hormis celui situé en position $(1,1)$, égal à n.
Posons $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$. Alors $\mathrm{A}^3 = \mathrm{M} \iff \mathrm{B}^3 = \mathrm{D}$ et $\operatorname{tr} \mathrm{A} = \operatorname{tr} \mathrm{B}$ donc il s'agit de montrer que $(\operatorname{tr} \mathrm{B})^3 = n$.
On a $\mathrm{BD} = \mathrm{B}^4 = \mathrm{DB}$ donc B commute avec D. Or il est facile de constater que les matrices qui commutent avec D sont de la forme $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{C} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.
Ainsi, $\mathrm{B}^3 = \mathrm{D}$ si et seulement si $x^3 = n$ et $\mathrm{C}^3 = 0$. La matrice C est nilpotente donc sa seule valeur propre est 0, avec pour conséquence $\operatorname{tr} \mathrm{C} = 0$. On a donc $\operatorname{tr} \mathrm{B} = x$ avec $x^3 = n$, soit $(\operatorname{tr} \mathrm{B})^3 = n$.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $(\lambda_x, \mu_x) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$.

a) Montrer que u admet au plus deux valeurs propres.

b) Si u n'admet qu'une seule valeur propre, déterminer λ_x et μ_x.

a) Supposons que u admette trois valeurs propres distinctes α_1, α_2 et α_3. Considérons trois vecteurs propres associés respectivement à chacune de ces trois valeurs propres : $u(x_i) = \alpha_i x_i$, $i \in \{1,2,3\}$. La famille (x_1, x_2, x_3) est libre.
Posons $x = x_1 + x_2 + x_3$ et appliquons-lui l'hypothèse : $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$. Mais $u(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ et $u^2(x) = \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \alpha_3^2 x_3$ et compte tenu de la liberté de la famille (x_1, x_2, x_3) on en déduit :

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \lambda_x \alpha_1 + \mu_x \\ \alpha_2^2 = \lambda_x \alpha_2 + \mu_x \\ \alpha_3^2 = \lambda_x \alpha_3 + \mu_x \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation à la première, et sachant que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ on en déduit que $\lambda_x = \alpha_1 + \alpha_2$. De la même manière, en soustrayant la troisième équation à la première on déduit que $\lambda_x = \alpha_1 + \alpha_3$. Mais alors $\alpha_2 = \alpha_3$, ce qui est absurde. Ainsi, u possède au plus deux valeurs propres distinctes.

b) Si $x = 0_E$ n'importe quelles valeurs de λ_0 et μ_0 conviennent.
Si x est vecteur propre pour la valeur propre α, la condition revient à écrire $\alpha^2 = \lambda_x \alpha + \mu_x$ donc λ_x est quelconque et $\mu_x = \alpha^2 - \lambda_x \alpha$.
Si x n'est pas vecteur propre de u, la famille $(x, u(x))$ est libre donc engendre un plan H, stable par u puisque $u^2(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Dans la base $(b) = (x, u(x))$, $\mathrm{Mat}_{(b)}(u_H) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_x \\ 1 & \lambda_x \end{pmatrix}$ et $\chi_{u_H}(X) = X^2 - \lambda_x X - \mu_x$. Cependant, toute valeur propre de u_H est valeur propre de u donc χ_{u_H} ne peut admettre que α pour racine. Puisque le corps de base est $\mathbb{C}$ la seule possibilité est que $\chi_{u_H}(X) = (X - \alpha)^2$, ce qui impose $\lambda_x = 2\alpha$ et $\mu_x = -\alpha^2$.

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $\lambda^3 = -\lambda$ donc $\lambda \in \{0, i, -i\}$.
A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire ayant des 0, i et $-i$ sur la diagonale. Notons p le nombre de i et q le nombre de $-i$; alors $\mathrm{tr}\, A = (p-q)i$ (la trace est un invariant de similitude). Mais A est une matrice réelle donc $\mathrm{tr}\, A = 0$, ce qui impose $p = q$, et donc $\mathrm{tr}\, A = 0$.

Exercice 5 †

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Montrer l'existence de $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $B = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de A, avec $Ae_i = \lambda_i e_i$ et $i \neq j \implies \lambda_i \neq \lambda_j$.
On a $A(Be_k) = B(Ae_k) = \lambda_k (Be_k)$ donc $Be_k \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_k) = \mathrm{Vect}(e_k)$ (chacun des n sous-espaces propres est de dimension 1). Il existe donc $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $Be_k = \mu_k e_k$.

Notons $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ le polynôme d'interpolation qui vérifie $P(\lambda_k) = \mu_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, et posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a $Be_j = \mu_j e_j = P(\lambda_j) e_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_j^k e_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k e_j$. Les matrices B et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$ coïncident sur la base (e) ; elles sont égales.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,i+1} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{n,1} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls.

a) Montrer que $\chi_A(x) = x^n - 1$ et que $A^n = I_n$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $B = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$. Montrer que B est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

c) Soit $C = I_n + A^2 + A^4 + \cdots + A^{2(p-1)}$. À quelle condition la matrice C est-elle inversible ?

a) Si on développe suivant la première colonne on obtient $\chi_A(x) = x^n - 1$. Ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, semblable à $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$ où $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

A^n est donc semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $D^n = \mathrm{diag}(1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{(n-1)n}) = I_n$ donc $A^n = I_n$.

b) B est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à

$$\mathrm{diag}\Big(\sum_{j=0}^{p-1} 1, \sum_{j=0}^{p-1} \omega^j, \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{2j}, \dots, \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{(n-1)j}\Big) = \mathrm{diag}\Big(p, \frac{1-\omega^p}{1-\omega}, \frac{1-\omega^{2p}}{1-\omega^2}, \dots, \frac{1-\omega^{(n-1)p}}{1-\omega^{n-1}}\Big)$$

donc B est inversible si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\omega^{kp} \neq 1$, autrement dit si n ne divise pas kp.
Posons $d = \mathrm{pgcd}(n, p)$, $n = dn'$ et $p = dp'$. B est inversible si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, n' ne divise pas kp', soit encore n' ne divise pas k puisque $\mathrm{pgcd}(n', p') = 1$.
Mais $n' \in [\![1, n]\!]$ donc pour que n' ne divise pas k pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ il faut et il suffit que $n' = n$, soit $d = 1$.

c) C est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à : $\mathrm{diag}\Big(\sum_{j=0}^{p-1} 1, \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{2j}, \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{4j}, \dots, \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{2(n-1)j}\Big)$.

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{p-1} \omega^{2kj} = \begin{cases} p & \text{si } \omega^{2k} = 1, \text{ autrement dit si } n \text{ divise } 2k \\ \dfrac{1-\omega^{2pk}}{1-\omega^{2k}} & \text{sinon} \end{cases}$

– Si n est impair, n ne divise jamais $2k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ donc C est inversible si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, n ne divise pas $2pk$, ce qui équivaut à dire que n ne divise pas pk, et comme à la question précédente ceci se traduit par la condition $\mathrm{pgcd}(n, p) = 1$.

– Si n est pair on pose $n = 2n'$. Alors C est inversible si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{n'\}$, n ne divise pas $2pk$, soit n' ne divise pas pk.
Posons cette fois $d = \mathrm{pgcd}(n', p)$, $n' = n''d$ et $p = p'd$. La condition s'écrit alors : pour tout $k \in [\![1, 2n'-1]\!] \setminus \{n'\}$, n'' ne divise pas k, autrement dit $n'' = n'$, ou encore $d = 1$.

En conclusion, C est inversible si et seulement si :

– n est impair et premier avec p ;

– n est pair et $n/2$ est premier avec p.

Exercice 7 †

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.
Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\big(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{n-1}(a)\big)$ soit une base de E si et seulement si u possède n valeurs propres distinctes.

Supposons qu'un tel vecteur a existe. En décomposant $u^n(a)$ dans la base : $u^n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k u^k(a)$, la matrice associée à u dans cette base prend la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & c_0 \\ 1 & \ddots & & c_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Étudions la diagonalisabilité de A ; pour cela, il s'avère plus facile d'étudier la diagonalisabilité de A^T. Cherchons donc les valeurs et vecteurs propres de A^T en résolvant $A^T X = \lambda X$ ce qui donne :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \cdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ c_0 x_1 + c_1 x_2 + \cdots + c_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \cdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (c_0 + c_1 \lambda + \cdots + c_{n-1} \lambda^{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Les valeurs propres de A^T sont les racines du polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$. En outre, les solutions du système forment un espace vectoriel de dimension 1 engendré par le vecteur $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$.
On dispose donc d'au plus n sous-espaces propres, tous de dimension 1. Mais par hypothèse u, et donc A et A^T, est diagonalisable, donc ces sous-espaces propres sont au nombre de n, et u possède bien n valeurs propres distinctes.

Réciproquement, supposons que u possède n valeurs propres distinctes, et considérons une base $(e_1,\dots,e_n)$ formée de vecteurs propres de u : on pose $u(e_k)=\lambda_k e_k$.
Posons $a=\sum_{k=1}^{n} e_k$ et $A=\mathrm{Mat}_{(e)}\big(a,u(a),\dots,u^{n-1}(a)\big)$. Il s'agit de prouver que A est inversible. Or il est facile de constater que $\det A$ est un déterminant de Vandermonde ; ainsi $\det A=\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$ puisque les valeurs propres sont distinctes.
La famille $\big(a,u(a),\dots,u^{n-1}(a)\big)$ est bien une base de E.

Exercice 8 †

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Ker}(u^2)$.

Si λ est valeur propre de u alors λ^2 est valeur propre de u^2 donc les valeurs propres de u sont à chercher parmi les racines carrées des valeurs propres de u^2. Ainsi, si on note $\mu_1,\dots,\mu_p$ les valeurs propres *non nulles* de u^2, et $\lambda_k\in\mathbb{C}$ tel que $\lambda_k^2=\mu_k$, u est diagonalisable si et seulement si

$$E=\mathrm{Ker}(u)\oplus\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(u+\lambda\mathrm{Id})$$

(certains de ces sous-espaces peuvent être réduits à $\{0_E\}$, mais cela ne change rien au raisonnement).

Commençons par montrer que si $\lambda\neq 0$, $\mathrm{Ker}(u^2-\lambda^2\mathrm{Id})=\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(u+\lambda\mathrm{Id})$.

- Si $x\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})$ et $y\in\mathrm{Ker}(u+\lambda\mathrm{Id})$ alors $u^2(x+y)=u(\lambda x-\lambda y)=\lambda^2(x+y)$ donc $x+y\in\mathrm{Ker}(u-2-\lambda^2\mathrm{Id})$. On a prouvé que $\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})+\mathrm{Ker}(u+\lambda\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}(u^2-\lambda^2\mathrm{Id})$.
- Réciproquement, si $z\in\mathrm{Ker}(u^2-\lambda^2\mathrm{Id})$, une analyse montre qu'en posant $x=\frac{1}{2\lambda}\big(z+u(z)\big)$ et $y=\frac{1}{2\lambda}\big(z-u(z)\big)$ on a $z=x+y$ et $x\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})$, $y\in\mathrm{Ker}(u+\lambda\mathrm{Id})$ donc $\mathrm{Ker}(u-\lambda^2\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})+\mathrm{Ker}(u+\lambda\mathrm{Id})$.
- Enfin, si $x\in\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})\cap\mathrm{Ker}(u+\lambda\mathrm{Id})$ alors $u(x)=\lambda x=-\lambda x$ donc $x=0_E$ car $\lambda\neq 0$.

Puisque u^2 est diagonalisable, $E=\mathrm{Ker}(u^2)\oplus\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(u^2-\lambda_k^2\mathrm{Id})=\mathrm{Ker}(u^2)\oplus\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(u+\lambda\mathrm{Id})$.

Puisque $\mathrm{Ker}(u)\subset\mathrm{Ker}(u^2)$, on en déduit que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Ker}(u^2)$.

Exercice 9 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B=\left(\begin{array}{c|c}A&A\\\hline O_n&I_n\end{array}\right)\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A.

Commençons par nous intéresser aux éléments propres de B en calculant son polynôme caractéristique :

$$\chi_B(x)=\left|\begin{array}{c|c}xI_n-A&-A\\\hline O_n&(x-1)I_n\end{array}\right|=\det(xI_n-A)\times\det((x-1)I_n)=(x-1)^n\chi_A(x)$$

Les valeurs propres de B sont donc celles de A, augmentées éventuellement de la valeur 1 si celle-ci n'est pas déjà valeur propre de A.
Pour $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\cup\{1\}$, étudions maintenant les vecteurs propres de B en résolvant :

$$B\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\iff\begin{cases}A(X+Y)=\lambda X\\ Y=\lambda Y\end{cases}\qquad\text{d'inconnues } X,Y\in\mathbb{R}^n.$$

– Si $\lambda\neq 1$ ce système est équivalent à $\begin{cases}AX=\lambda X\\ Y=0\end{cases}$. Ceci montre que l'application

$$\left(\begin{array}{ccc}\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)&\longrightarrow&\mathrm{Ker}(B-\lambda I_{2n})\\ X&\longmapsto&\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

est un isomorphisme, donc que $\dim\mathrm{Ker}(B-\lambda I_{2n})=\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$.

– Si $\lambda=1$ on a $B-I_{2n}=\left(\begin{array}{c|c}A-I_n&A\\\hline O_n&O_n\end{array}\right)$ et par opérations élémentaires on obtient $\mathrm{rg}(B-I_{2n})=\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c}-I_n&A\\\hline O_n&O_n\end{array}\right)=n$ donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(B-I_{2n})\big)=2n-n=n$.

Montrons maintenant le résultat demandé :

– Si A est diagonalisable et $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A) \cup \{1\}$ et $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim\left(\mathrm{Ker}(B - \lambda I_{2n})\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\left(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(B - I_{2n})\right) = n + n = 2n$ donc B est diagonalisable.

– Réciproquement, si B est diagonalisable alors $2n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim\left(\mathrm{Ker}(B - \lambda I_{2n})\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}} \dim\left(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(B - I_{2n})\right)$ donc $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}} \dim\left(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\right) = 2n - n = n$. Ceci montre que A est diagonalisable et que 1 n'est pas valeur propre de A (car la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut dépasser n).