Probabilités (complément pour 5/2)

Exercice 1 On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes. On suppose que $r \in [\![1, 2n-1]\!]$ personnes décèdent. Déterminer le nombre moyen de couples restants.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, telles que $\mathbb{P}(A_{ij} = 1) = \mathbb{P}(A_{ij} = -1) = 1/2$. On note A la matrice $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Déterminer l'espérance de $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(A^2)$, $\mathrm{tr}(A^3)$ et $\mathrm{tr}(A^4)$.

b) Déterminer l'espérance de $\det(A)$.

Exercice 3 Un sac contient N cordes. À la première étape on choisit au hasard deux extrémités de cordes et on les noue. On dit qu'on a une *boucle* si on a noué les extrémités d'une même corde.

a) Déterminer l'espérance du nombre X de boucles après la première étape.

b) On réitère N fois l'opération en nouant à chaque fois deux extrémités libres. On note Y le nombre de boucles. Déterminer l'espérance de Y.

Exercice 4 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ et on considère $\epsilon > 0$.

a) Majorer $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \epsilon\right)$.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = (\mathrm{ch}\, t)^n$.

c) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathrm{ch}\, t \leqslant e^{t^2/2}$.

d) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\epsilon\right)$.

e) Montrer que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp(-n\epsilon^2/2)$.

Exercice 5 Peut-on truquer un dé à six faces de sorte que la somme des résultats obtenus à deux lancers indépendant suive une loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

Exercice 6 On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Déterminer la probabilité pour que la somme des résultats obtenus soit divisible par 5.

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de X. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On pose $N_n = \mathrm{card}\{S_k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$ et on note enfin A l'événement $A = \displaystyle\bigcap_{n \geqslant 1} \left(S_n \neq 0\right)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}\left(S_{n+1} \notin \{S_0, \dots, S_n\}\right) = \mathbb{P}\left(S_1 \neq 0, \dots, S_{n+1} \neq 0\right)$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\frac{N_n}{n}\right) = \mathbb{P}(A)$.