Probabilités (complément pour 5/2)

Exercice 1 On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes. On suppose que $r \in [\![1, 2n-1]\!]$ personnes décèdent. Déterminer le nombre moyen de couples restants.

On note X le nombre de couples restants. À tout sous-ensemble A de deux personnes prises parmi les survivants on associe la variable aléatoire Z_A égale à 1 si ces deux personnes forment un couple, et à 0 sinon. On a alors $\mathbb{E}(X) = \sum_A \mathbb{E}(Z_A)$.

$Z_A \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2n-1}\right)$ donc $\mathbb{E}(Z_A) = \frac{1}{2n-1}$ et ainsi $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2n-1}\operatorname{card} A = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-r}{2}$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, telles que $\mathbb{P}(A_{ij} = 1) = \mathbb{P}(A_{ij} = -1) = 1/2$. On note A la matrice $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Déterminer l'espérance de $\operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{tr}(A^2)$, $\operatorname{tr}(A^3)$ et $\operatorname{tr}(A^4)$.

b) Déterminer l'espérance de $\det(A)$.

a) $\operatorname{tr}(A) = \sum_i A_{ii}$ donc $\mathbb{E}(\operatorname{tr}(A)) = \sum_i \mathbb{E}(A_{ii}) = 0$.

$\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i,j} A_{ij}A_{ji} = \sum_i A_{ii}^2 + \sum_{i \neq j} A_{ij}A_{ji} = n + \sum_{i \neq j} A_{ij}A_{ji}$ donc, puisque A_{ij} et A_{ji} sont indépendants lorsque $i \neq j$, $\mathbb{E}(\operatorname{tr}(A^2)) = n + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(A_{ij})\mathbb{E}(A_{ji}) = n$.

$\operatorname{tr}(A^3) = \sum_{i,j,k} A_{ij}A_{jk}A_{ki} = \sum_i A_{ii}^3 + 3\sum_{i \neq j} A_{ii}A_{ij}A_{ji} + \sum_{i \neq j, j \neq k, k \neq i} A_{ij}A_{jk}A_{ki}$ donc $\mathbb{E}(\operatorname{tr}(A^3)) = \sum_i \mathbb{E}(A_{ii}^3) = \sum_i \mathrm{E}(A_{ii}) = 0$.

$\operatorname{tr}(A^4) = \sum_{i,j,k,l} A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{li}$ donc suivant le même principe on obtient $\mathbb{E}(\operatorname{tr}(A^4)) = \sum_i \mathbb{E}(A_{ii}^4) + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(A_{ij}^2)\mathbb{E}(A_{ji}^2) = n + n(n-1) = n^2$.

b) Considérons la matrice A' obtenue à partir de A en multipliant sa première colonne par -1. Alors $\mathbb{E}(\det(A')) = \mathbb{E}(\det(A))$. Mais $\det(A') = -\det(A)$ donc $\mathbb{E}(\det(A)) = 0$.

Exercice 3 Un sac contient N cordes. À la première étape on choisit au hasard deux extrémités de cordes et on les noue. On dit qu'on a une *boucle* si on a noué les extrémités d'une même corde.

a) Déterminer l'espérance du nombre X de boucles après la première étape.

b) On réitère N fois l'opération en nouant à chaque fois deux extrémités libres. On note Y le nombre de boucles. Déterminer l'espérance de Y.

a) X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2N-1}$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2N-1}$.

b) Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si une boucle est formée à la n^e étape et à 0 sinon. Puisqu'après n étapes il reste $2(N-n)$ extrémités libres, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2(N-n)+1}$.

Sachant que $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$ on en déduit par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2(N-n)+1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1}$.

Exercice 4 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ et on considère $\epsilon > 0$.

a) Majorer $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \epsilon\right)$.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = (\operatorname{ch} t)^n$.

c) Montrer que pour tout $t > 0$, $\operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}$.

d) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\epsilon\right)$.

e) Montrer que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\right) \leqslant \exp(-n\epsilon^2/2)$.

a) On a $X_i = 2Y_i - 1$ avec $Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$ donc $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{V}(X_i) = 1/2$.
Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = 0$, et grâce à l'indépendance $\mathbb{V}(S_n) = n/2$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}\Big(\big|S_n - E(S_n)\big| \geqslant n\epsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{(n\epsilon)^2}$, soit : $\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{S_n}{n}\Big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \dfrac{1}{2n\epsilon^2}$.

b) Posons $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Alors $T_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/2)$ et $S_n = 2T_n - n$ donc d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}(e^{(2T_n - n)t}) = \sum_{k=0}^{n} e^{(2k-n)t}\,\mathbb{P}(T_n = k) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kt}\, e^{-(n-k)t} = \frac{(e^t + e^{-t})^n}{2^n} = (\operatorname{ch} t)^n.$$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{t^2/2}$ car $\dfrac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1) \geqslant 1$.

d) On applique l'inégalité de Markov à e^{tS_n} : $\mathbb{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\Big) = \mathbb{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{nt\epsilon}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{nt\epsilon}} = (\operatorname{ch} t)^n e^{-nt\epsilon} \leqslant \exp\Big(\dfrac{nt^2}{2} - nt\epsilon\Big)$.

e) En prenant $t = \epsilon$ on obtient : $\mathrm{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \exp(-n\epsilon^2/2)$.

Exercice 5 Peut-on truquer un dé à six faces de sorte que la somme des résultats obtenus à deux lancers indépendant suive une loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$?

On note X la variable aléatoire égale au résultat d'un lancer de dé, et X_i ($i \in \{1, 2\}$) le résultat du i^e lancer. On cherche la loi de X de sorte que pour tout $n \in [\![2, 12]\!]$, $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \dfrac{1}{11}$.
Par indépendance des lancers, $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \displaystyle\sum_{\substack{i+j=n \\ (i,j) \in [\![1,6]\!]^2}} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum_{\substack{i+j=n \\ (i,j) \in [\![1,6]\!]^2}} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(X = j)$.
$n = 2$ et $n = 12$ donnent $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 6) = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$.
$n = 3$ et $n = 11$ donnent $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 5) = \dfrac{1}{2\sqrt{11}}$.
$n = 4$ et $n = 10$ donnent $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \dfrac{3}{8\sqrt{11}}$.
La somme n'est pas égale à 1 donc un tel trucage n'est pas possible.

Exercice 6 On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Déterminer la probabilité pour que la somme des résultats obtenus soit divisible par 5.

Soit X une variable qui suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, et X_k le résultat du k^e lancer.
On veut calculer $\mathbb{P}\big(X_1 + \cdots + X_n \equiv 0 \bmod 5\big)$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $p_n(k) = \mathbb{P}\big(X_1 + \cdots + X_n \equiv k \bmod 5\big)$. On a :

$$p_n(k) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}\big(X_1 + \cdots + X_{n-1} \equiv k - i \bmod 5\big)\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{6}\Big(2p_{n-1}(k-1) + p_{n-1}(k-2) + p_{n-1}(k-3) + p_{n-1}(k-4) + p_{n-1}(k-5)\Big)$$

Ce qui se traduit matriciellement par $V_n = AV_{n-1}$ avec $V_n = \begin{pmatrix} p_n(0) \\ p_n(1) \\ \vdots \\ p_n(4) \end{pmatrix}$, $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $UJ = JU = U$ et $U^k = 5^{k-1}U$ pour $k \geqslant 1$ donc

$$A^n = \frac{1}{6^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^k J^{n-k} = \frac{1}{6^n}\Big(J^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} U^k\Big) = \frac{1}{6^n}\Big(J^n + \frac{6^n - 1}{5} U\Big)$$

J^n se calcule facilement et $V_n = A^n V_0$ donc $p_n(0) = \dfrac{1}{5}\Big(1 + \dfrac{4}{6^n}\Big)$ si $n \equiv 0 \bmod 5$ et $p_n(0) = \dfrac{1}{5}\Big(1 - \dfrac{1}{6^n}\Big)$ sinon.

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de X. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On pose $N_n = \operatorname{card}\{S_k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$ et on note enfin A l'événement $A = \bigcap_{n \geqslant 1} \big(S_n \neq 0\big)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}\big(S_{n+1} \notin \{S_0, \ldots, S_n\}\big) = \mathbb{P}\big(S_1 \neq 0, \ldots, S_{n+1} \neq 0\big)$.

b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\dfrac{N_n}{n}\right) = \mathbb{P}(A)$.

a) On a
$$\begin{cases} S_{n+1} - S_0 = \alpha_1 \\ S_{n+1} - S_1 = \alpha_2 \\ \quad\vdots \\ S_{n+1} - S_{n-1} = \alpha_n \\ S_{n+1} - S_n = \alpha_{n+1} \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1} = \alpha_1 \\ X_2 + \cdots + X_{n+1} = \alpha_2 \\ \quad\vdots \\ X_n + X_{n+1} = \alpha_n \\ X_{n+1} = \alpha_{n+1} \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ X_2 = \alpha_2 - \alpha_3 \\ \quad\vdots \\ X_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \\ X_{n+1} = \alpha_{n+1} \end{cases}$$
et par ailleurs
$$\begin{cases} X_1 = \alpha_{n+1} \\ X_2 = \alpha_n - \alpha_{n+1} \\ \quad\vdots \\ X_n = \alpha_2 - \alpha_1 \\ X_{n+1} = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \iff \begin{cases} S_1 = \alpha_{n+1} \\ S_2 = \alpha_n \\ \quad\vdots \\ S_n = \alpha_2 \\ S_{n+1} = \alpha_1 \end{cases}$$
Sachant que les variables (X_k) sont indépendantes et identiquement distribuées, les vecteurs aléatoires $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ et $(X_{n+1}, \ldots, X_1)$ suivent la même loi et ainsi, $\mathbb{P}(S_{n+1} - S_0 = \alpha_0, \ldots, S_{n+1} - S_n = \alpha_{n+1}) = \mathbb{P}(S_1 = \alpha_{n+1}, \ldots, S_{n+1} = \alpha_1)$.
En faisant varier $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ dans $(\mathbb{Z}^*)^{n+1}$ on en déduit : $\mathbb{P}(S_{n+1} \notin \{S_0, \ldots, S_n\}) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{n+1} \neq 0)$.

b) Considérons la variable aléatoire V_n égale à 1 si $S_{n+1} \notin \{S_0, \ldots, S_n\}$, et à 0 sinon. Alors $N_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$ donc

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(V_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{n+1} \notin \{S_0, \ldots, S_n\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{n+1} \neq 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{avec } A_n = \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} (S_k \neq 0).$$

D'après le théorème de la limite monotone, $\lim \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$ et d'après le théorème de Cesàro, $\lim \mathrm{E}\left(\dfrac{N_n}{n}\right) = \mathbb{P}(A)$.