Intégrales (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \in [0,1]$.
Montrer que pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)^3 \, \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t\right)^2$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.
Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3 Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de limite nulle en $+\infty$. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(2t) - f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 4 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\displaystyle \mathrm{I}_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

b) Justifier l'existence de I_n, puis montrer que $\displaystyle \lim \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t$.

c) Montrer que $\displaystyle \gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, \mathrm{d}t$.

Exercice 5 Soit $\displaystyle \Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de Γ.

b) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\displaystyle \mathrm{T}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. Calculer $\mathrm{T}_n(x)$.

c) Montrer que $\displaystyle \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Exercice 6 On considère l'intégrale $\displaystyle \mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de cette intégrale.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\displaystyle \mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \, \mathrm{d}t$.
Justifier l'existence de cette intégrale, puis montrer que la suite (I_n) est constante.

c) Déduire de la valeur de I_n, celle de I.

Indication. Utiliser l'intégrale $\displaystyle \mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \, \mathrm{d}t$.