Intégrales (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f'(x)\in[0,1]$.
Montrer que pour $x\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)^3\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

Notons déjà que f est croissante puisque $f'\geqslant 0$, et donc positive puisque $f(0)=0$.
Posons $g : x\mapsto\displaystyle\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f(t)^3\,\mathrm{d}t$.
Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, g est de classe $\mathscr{C}^2$ d'après le théorème fondamental de l'intégration, et : $\forall x\geqslant 0$,

$$g'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)^3=f(x)h(x)\quad\text{avec}\quad h(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)^2.$$

h est de classe $\mathscr{C}^1$ et $h'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)(1-f'(x))\geqslant 0$ donc h est croissante. Mais $h(0)=0$ donc $h(x)\geqslant 0$ pour tout $x\geqslant 0$.
On en déduit que $g'(x)\geqslant 0$ pour tout $x\geqslant 0$. Mais $g(0)=0$ donc $g(x)\geqslant 0$, ce qui prouve la majoration demandée.

Exercice 2 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.
Montrer qu'il existe un unique $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\lambda-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Posons $\mathrm{F} : x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et réalisons une intégration par parties :

$$\int_1^x\frac{\lambda-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(1)-\frac{\mathrm{F}(x)}{x}+\int_1^x\frac{\lambda t-\mathrm{F}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $n=\lfloor x/\mathrm{T}\rfloor$. On a $n\mathrm{T}\leqslant x<(n+1)\mathrm{T}$ et

$$\mathrm{F}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\mathrm{T}}^{(k+1)\mathrm{T}}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{n\mathrm{T}}^x f(t)\,\mathrm{d}t=n\int_0^{\mathrm{T}}f(u)\,\mathrm{d}u+\int_0^{x-n\mathrm{T}}f(u)\,\mathrm{d}u.$$

On a $\displaystyle\left|\int_0^{x-n\mathrm{T}}f(u)\,\mathrm{d}u\right|\leqslant\int_0^{\mathrm{T}}|f(u)|\,\mathrm{d}u=\mathrm{M}$ donc $\displaystyle\left|\frac{\mathrm{F}(x)}{x}-\frac{n}{x}\int_0^{\mathrm{T}}f(u)\,\mathrm{d}u\right|\leqslant\frac{\mathrm{M}}{x}$.
Enfin, $\displaystyle\frac{1}{\mathrm{T}}-\frac{1}{x}<\frac{n}{x}\leqslant\frac{1}{\mathrm{T}}$ donc $\displaystyle\frac{n}{x}\underset{x\to+\infty}{=}\frac{1}{\mathrm{T}}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{x}\Big)$ et

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x}\underset{+\infty}{=}\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}f(u)\,\mathrm{d}u+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

On en déduit que $\displaystyle\frac{\lambda t-\mathrm{F}(t)}{t^2}\underset{+\infty}{=}\frac{1}{t}\Big(\lambda-\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}f(u)\,\mathrm{d}u\Big)+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$, et ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\lambda-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\lambda=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}f(u)\,\mathrm{d}u$.

Exercice 3 Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ de limite nulle en $+\infty$. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(2t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_1^x\frac{f(2t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_2^{2x}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_1^x\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^2\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
Pour tout $\epsilon>0$ il existe $\mathrm{A}>0$ tel que pour $t\geqslant\mathrm{A}$ on a $|f(t)|\leqslant\epsilon$. Ainsi, pour $x\geqslant\mathrm{A}$, $\displaystyle\left|\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\epsilon\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\epsilon\ln 2$.
Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=0$ donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(2t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle-\int_1^2\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\mathrm{I}_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \,\mathrm{d}t$.

a) Montrer l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

b) Justifier l'existence de I_n, puis montrer que $\lim \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t$.

a) Posons $u_n = \mathrm{H}_n - \ln n$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, ce qui équivaut à dire par télescopage que la suite (u_n) converge.

b) Au voisinage de 0, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \underset{0}{\sim} \ln t \underset{0}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Notons $f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$ et appliquons le théorème de convergence dominée à $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) \,\mathrm{d}t$.

– Pour $t > 0$ fixé il existe un rang à partir duquel $n \geqslant t$ et ainsi $\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t = \mathrm{e}^{-t} \ln t$.

– L'inégalité classique $\ln(1 - u) \leqslant -u$ montre que $|f_n(t)| \leqslant |\ln t| \mathrm{e}^{-t} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ ($\phi(t) \underset{0}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\phi(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t/2})$) donc le théorème s'applique : $\lim \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t$.

c) Le changement de variable $t = nx$ donne

$$\mathrm{I}_n = n \int_0^1 (1 - x)^n \ln(nx) \,\mathrm{d}x = n \ln n \int_0^1 (1 - x)^n \,\mathrm{d}x + n \int_0^1 (1 - x)^n \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1} \ln n + n \int_0^1 (1 - x)^n \ln x \,\mathrm{d}x$$

puis à l'aide d'une intégration par parties : $\mathrm{I}_n = \frac{n}{n+1} \ln n - \frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{1 - (1 - x)^{n+1}}{x} \,\mathrm{d}x$.

Or $\int_0^1 \frac{1 - (1 - x)^{n+1}}{x} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (1 - x)^k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ donc $\mathrm{I}_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \mathrm{H}_n - \frac{1}{n+1}\right)$ et ainsi, $\lim \mathrm{I}_n = -\gamma$.

Exercice 5 Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de Γ.

b) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{T}_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. Calculer $\mathrm{T}_n(x)$.

c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t/2})$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge, et $t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{x-1}}$ donc l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$. On en déduit que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

b) Réalisons n intégrations par parties successives en intégrant $t \mapsto t^{x-1}$ et en dérivant $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ pour obtenir :

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{T}_n(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} \frac{t^{x+k}}{x(x+1)\cdots(x+k)}\right]_{t=0}^{t=n} = \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

c) Appliquons maintenant le théorème de convergence dominée, en posant $f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

les fonctions f_n sont continues par morceaux, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : t \mapsto t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}$, elle-même continue par morceaux et : $\forall t > 0$, $|f_n(t)| \leqslant t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} = \phi(t)$. La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n(x) = \Gamma(x)$.

De la question précédente on déduit immédiatement que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Exercice 6 On considère l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de cette intégrale.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

Justifier l'existence de cette intégrale, puis montrer que la suite (I_n) est constante.

c) Déduire de la valeur de I_n, celle de I.

Indication. Utiliser l'intégrale $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) $\lim\limits_0 \dfrac{\sin t}{t} = 1$ donc l'intégrale I est faussement impropre en 0.

Pour tout $x > 0$ on effectue une intégration par parties : $\mathrm{I} = \left[\dfrac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite en $+\infty$; l'intégrale I est donc convergente.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ est prolongeable par continuité en 0, ce qui suffit à justifier l'existence de I_n.

On utilise la formule $\sin a - \sin b = 2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$ pour obtenir $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2n+2)t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2n+2)t}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ donc la suite (I_n) est constante, égale à $\mathrm{I}_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

c) On a $\mathrm{I} = \lim \displaystyle\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim \mathrm{J}_n$ en effectuant le changement de variable $t = (2n+1)u$. Nous allons montrer que $\lim|\mathrm{J}_n - \mathrm{I}_n| = 0$, ce qui permettra de conclure que $\mathrm{I} = \lim \mathrm{J}_n = \dfrac{\pi}{2}$ puisque (I_n) est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

On a $\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)t f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et au voisinage de 0 on a $f(t) \underset{0}{=} \dfrac{t}{6} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$. cette fonction est donc prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$, et ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque f admet un développement limité d'ordre 1 en 0. On peut donc effectuer une intégration par parties :

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n = \left[\frac{-1}{2n+1}\cos(2n+1)t f(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)t f'(t)\,\mathrm{d}t = +\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)t f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, $|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| \leqslant \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\lim|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| = 0$.