Espaces vectoriels normés (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2 Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

a) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Montrer que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$. Que dire de A lorsque $|\lambda| = 1$?

Exercice 3

a) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{tr}(\mathrm{M}^k) = 0$. Montrer que M est nilpotente.

b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{C}$, A est semblable à $\mathrm{A} + t\mathrm{B}$. Montrer que B est nilpotente.

c) Soit (M_n) une suite de matrices semblables entre elles, telle que $\lim \mathrm{M}_n = 0$. Montrer que M_0 est nilpotente.

d) Soit M_0 une matrice nilpotente. Montrer l'existence d'une suite de matrices (M_n) semblables à M_0 telle que $\lim \mathrm{M}_n = 0$.

Exercice 4 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{E} = \left\{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \;\middle|\; \mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné si et seulement si M est la matrice d'une homothétie.