Espaces vectoriels normés (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Posons $A = aU$ où U est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. $\operatorname{rg} U = 1$ donc 0 est valeur propre d'ordre $p-1$. Sachant que la trace de U est la somme des valeurs propres (complexes) de U, on en déduit que p est une valeur propre d'ordre 1. Il en résulte que U est diagonalisable : il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$ telle que $U = P\operatorname{diag}(0,\dots,0,p)P^{-1}$. Ainsi, $A^n = P\operatorname{diag}\big(0,\dots,0,(ap)^n\big)P^{-1}$ et la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite numérique $\big((ap)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, autrement dit si $-\dfrac{1}{p} < a \leqslant \dfrac{1}{p}$.

Exercice 2 Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$. Que dire de A lorsque $|\lambda| = 1$?

a) Il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$ telle que $A = P\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)P^{-1}$. Alors $A^n = P\operatorname{diag}(\lambda_1^n,\dots,\lambda_p^n)P^{-1}$. Mais pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\lim \lambda_k^n = 0$ car $|\lambda_k| < 1$, donc $\lim A^n = 0$.

b) Considérons un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ pour la valeur propre λ. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n x = \lambda^n x$. La suite vectorielle $(A^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc il en est de même de $(\lambda^n x)_{n\in\mathbb{N}}$, et le vecteur x étant non nul ceci impose à la suite (λ^n) de converger, avec pour conséquence $|\lambda| \leqslant 1$.
Lorsque $|\lambda| = 1$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{i\theta}$; la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. Nous allons maintenant montrer que nécessairement $\lambda = 1$.
Posons $\ell = \lim e^{in\theta}$. La suite $(e^{in\theta})$ ne peut tendre vers 0 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|e^{in\theta}| = 1$, donc $\ell \in \mathbb{C}^*$.
En passant à la limite dans l'égalité $e^{i(n+1)\theta} = e^{i\theta} e^{in\theta}$ on obtient $\ell = e^{i\theta}\ell$, puis $e^{i\theta} = 1$ puisque $\ell \neq 0$. Ainsi, $\lambda = 1$.
On peut donc en déduire que toutes les valeurs propres de A sont soit égales à 1, soit de module strictement inférieur à 1.

Exercice 3

a) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\operatorname{tr}(M^k) = 0$. Montrer que M est nilpotente.

b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{C}$, A est semblable à $A + tB$. Montrer que B est nilpotente.

c) Soit (M_n) une suite de matrices semblables entre elles, telle que $\lim M_n = 0$. Montrer que M_0 est nilpotente.

d) Soit M_0 une matrice nilpotente. Montrer l'existence d'une suite de matrices (M_n) semblables à M_0 telle que $\lim M_n = 0$.

a) $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ donc M est semblable à une matrice triangulaire T. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les termes diagonaux de T.
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, M^k est semblable à T^k donc pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k = 0$.
Considérons un polynôme de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ (sans terme constant et de degré inférieur ou égal à p). Une combinaison linéaire des équations précédentes montre qu'un tel polynôme vérifie $P(\lambda_1) + \cdots + P(\lambda_p) = 0$.
Appliqué au polynôme $P_j = X \displaystyle\prod_{\lambda_i \neq \lambda_j} (X - \lambda_i)$ cette égalité fournit la relation : $\lambda_j \displaystyle\prod_{\lambda_i \neq \lambda_j} (\lambda_j - \lambda_i) = 0$ qui impose $\lambda_j = 0$, et ce pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.
La diagonale de T est nulle donc T est nilpotente, et par voie de conséquence M aussi.

b) Nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(B^k) = 0$. On commence par traiter les cas $k = 1$ et $k = 2$ pour mieux comprendre le raisonnement.

- A et $A + tB$ sont semblables donc $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A + tB)$, ce qui donne pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t\operatorname{tr}(B) = 0$. Pour $t \neq 0$ ceci impose $\operatorname{tr} B = 0$. Le résultat est acquis pour $k = 1$.
- A^2 et $(A + tB)^2$ sont semblables donc $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^2 + t(AB + BA) + t^2B^2)$, ce qui donne : $\forall t \in \mathbb{C}$, $t\operatorname{tr}(AB + BA) + t^2\operatorname{tr}(B^2) = 0$. Une fonction polynomiale est identiquement nulle si et seulement si chacun de ses coefficients

est nuls, donc $\mathrm{tr}(AB+BA)=0$ et $\mathrm{tr}(B^2)=0$.

Plus généralement, A^k et $(A+tB)^k$ sont semblables donc $\mathrm{tr}\Big((A+tB)^k - A^k\Big)=0$, et le développement de cette expression donne une fonction polynomiale identiquement nulle dont le coefficient dominant est $\mathrm{tr}(B^k)$. Il en résulte que $\mathrm{tr}(B^k)=0$, et la question précédente permet de conclure : B est nilpotent.

c) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(M_0^k)=\mathrm{tr}(M_n^k)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient par linéarité de la trace : $\mathrm{tr}(M_0^k)=\mathrm{tr}(0)=0$. D'après la première question M_0 est nilpotente.

d) M_0 est trigonalisable donc semblable à une matrice T triangulaire supérieure à diagonale nulle. Posons $T=(t_{ij})$ avec $i\geqslant j \Longrightarrow t_{ij}=0$.

Posons $Q(\lambda)=\mathrm{diag}(\lambda,\lambda^2,\dots,\lambda^p)$ avec $\lambda\neq 0$. Alors $Q(\lambda)^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda^{-1},\dots,\lambda^{-p})$.
On calcule facilement $Q(\lambda)TQ(\lambda)^{-1}=(\lambda^{i-j}t_{ij})$. Sachant que $i\geqslant j \Longrightarrow t_{ij}=0$ et que $i<j \Longrightarrow \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda^{i-j}=0$ il suffit de choisir pour λ une suite qui tend vers $+\infty$ pour obtenir une suite de matrices semblables à T donc à M_0 qui tend vers 0 ; par exemple $M_n=Q(n)TQ(n)^{-1}$.

Exercice 4 Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{E}=\Big\{P^{-1}MP \;\Big|\; P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\Big\}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné si et seulement si M est la matrice d'une homothétie.

Notons que puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, on peut choisir de travailler avec la norme $\|M\|=\max\limits_{i,j}|M_{i,j}|$.

Si M est la matrice d'une homothétie alors $M=\lambda I_n$ et $\mathcal{E}=\Big\{\lambda I_n\Big\}$ est borné puisqu'il ne contient qu'un seul élément.
Si M n'est pas la matrice d'une homothétie alors il existe $x\in\mathbb{R}^n$ tel que la famille (x,Mx) soit libre (résultat classique prouvé plus loin).

Soit alors $\alpha>0$ et une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $e_1=x$ et $e_2=\dfrac{1}{\alpha}Mx$. Notons P la matrice de passage de la base canonique vers la base (e). Alors $P^{-1}MP=\begin{pmatrix}0 & \\ \alpha & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$ et $\|P^{-1}MP\|\geqslant\alpha$.
Ceci étant valable pour tout $\alpha>0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas borné.

Pour finir, prouvons que si pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ la famille (x,Mx) est liée, alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $M=\lambda I_n$.
L'hypothèse se traduit par : pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, il existe $\lambda_x\in\mathbb{R}$ tel que $Mx=\lambda_x x$.
Soient x et y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.

- Si (x,y) est liée, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $y=\alpha x$ et alors $\lambda_y y=My=\alpha Mx=\alpha\lambda_x x=\lambda_x y$ donc $\lambda_y=\lambda_x$.
- Si (x,y) est libre, alors $\lambda_{x+y}(x+y)=M(x+y)=Mx+My=\lambda_x x+\lambda_y y$ et par unicité de la décomposition, $\lambda_{x+y}=\lambda_x=\lambda_y$.

Dans tous les cas, $\lambda_y=\lambda_x$ donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $Mx=\lambda x$; M est la matrice d'une homothétie.