Espaces euclidiens (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\displaystyle\min_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (a_{ij} - m_{ij})^2$.

Exercice 2 Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u. Montrer que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre λ est égal à la multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique.

Exercice 3 Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

a) Énoncer le théorème spectral.

b) Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$.

c) Justifier l'unicité de cette matrice B (*Indication : observer que* A *et* B *commutent*).

d) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

e) Montrer alors qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$ (décomposition polaire).

f) Justifier l'unicité de O et de S.

Exercice 4 Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, muni d'une base orthonormée $(e) = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $\mathrm{G} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} = (a_{ij})$ où a_{ij} est la i^{e} coordonnée de x_j dans la base (e).

a) Exprimer G à l'aide du produit scalaire de E.

b) Montrer que G est diagonalisable à valeurs propres positives. trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ses valeurs propres soient strictement positives.

c) Montrer qu'il existe $(y_1, \dots, y_n) \in \mathrm{E}^n$ tel que pour tout i, $\|y_i\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \|y_i - y_j\| = 1$.

Exercice 5 Soit E un espace euclidien muni d'une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i$$

a) Montrer que f est un automorphisme symétrique de E.

b) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique g tel que $g \circ g = f^{-1}$. g est-il unique ?

d) Soit g un automorphisme symétrique tel que $g \circ g = f^{-1}$. Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 6 Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} > 0$.

a) Montrer que $\det \mathrm{A} > 0$.

b) Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$, et $\mathrm{B} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. Montrer que $\det \mathrm{B} > 0$.

c) Réciproquement, soit A une matrice symétrique réelle telle que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\det((a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}) > 0$. Montrer que pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} > 0$.