Espaces euclidiens (complément pour 5/2)

Exercice 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\min_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (a_{ij} - m_{ij})^2$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. Pour ce produit scalaire, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux puisque si S et symétrique et A antisymétrique, $\langle S \mid A \rangle = \operatorname{tr}(S^T A) = \operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}(AS) = -\operatorname{tr}(A^T S) = -\langle A \mid S \rangle$ donc $\langle S \mid A \rangle = 0$.
Il s'agit donc de minimiser $\|A - M\|^2$ pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ce minimum est atteint lorsque $M = p(A)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit $M = \frac{1}{2}(A + A^T)$. La valeur de ce minimum vaut alors $\left\| \frac{1}{2}(A - A^T) \right\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j} (a_{ij} - a_{ji})^2$.

Exercice 2 Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u. Montrer que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre λ est égal à la multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique.

Soi $H = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ et $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de H, que l'on complète par une base orthonormée $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ de $H^\perp$. On pose $A = \operatorname{Mat}_{(e)}(u)$. Puisque (e) est orthonormée, A est une matrice orthogonale, et $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$.
On a $A^T A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^2 I & \lambda B \\ \hline \lambda B^T & B^T B + C^T C \end{array} \right) = I$ donc $\lambda = \pm 1$, $B = 0$ et $C^T C = I$. Ainsi, $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I & O \\ \hline O & C \end{array} \right)$ et par définition de H, λ ne peut être valeur propre de C, ce qui permet de conclure.

Exercice 3 Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

a) Énoncer le théorème spectral.

b) Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

c) Justifier l'unicité de cette matrice B (*Indication : observer que* A *et* B *commutent*).

d) Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

e) Montrer alors qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M = OS$ (décomposition polaire).

f) Justifier l'unicité de O et de S.

a) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres : il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $D = P^T A P$.

b) On applique le théorème spectral à la matrice A, en notant $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ (les valeurs propres de A). Posons alors $B = P \Delta P^T$ avec $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors $B^2 = A$.

c) A et B commutent car $AB = B^3 = BA$. Les sous-espaces propres de A sont donc stables par B, et la restriction de B à ces sous-espaces propres est symétrique. Par le théorème spectral il existe sur chacun des sous-espaces propres de A une base orthonormée qui diagonalise la restriction de B, et en concaténant ces bases on obtient une base orthonormée qui diagonalise A et B. Dès lors on a $A = PDP^T$ et $B = PD'P^T$ et $A = B^2 \iff D = D'^2 \iff D' = \Delta$ car les valeurs propres de B doivent être positives.

d) Posons $A = M^T M$ on a $A^T = A$ donc A est symétrique. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A = M^T M$, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Puisque M est inversible, $MX \neq 0$ et $\|MX\|^2 = X^T M^T M X = X^T A X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$ donc $\lambda > 0$.

e) Il existe donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = M^T M$. Posons $O = MS^{-1}$; alors $M = OS$ et $O^T O = S^{-1} M^T M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$ donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

f) Réciproquement, si $M = OS$ alors $M^T M = S^2$ et puisque M et S appartiennent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la question c) montre que S est unique. Il en est alors de même de $O = MS^{-1}$.

Exercice 4 Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, muni d'une base orthonormée $(e) = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $G = A^T A$ avec $A = (a_{ij})$ où a_{ij} est la i^e coordonnée de x_j dans la base (e).

a) Exprimer G à l'aide du produit scalaire de E.

b) Montrer que G est diagonalisable à valeurs propres positives. trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ses valeurs propres soient strictement positives.

c) Montrer qu'il existe $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$ tel que pour tout i, $\|y_i\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \|y_i - y_j\| = 1$.

a) $a_{ij} = \langle e_i \mid x_j \rangle$. Le coefficient d'indice (i, j) de G est égal à : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x_i \rangle \langle e_k \mid x_j \rangle = \langle x_i \mid x_j \rangle$.

b) G est symétrique réelle donc diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \neq 0$ tel que $GX = \lambda X$. On a $A^T AX = \lambda X$ donc $X^T A^T AX = \lambda X^T X$, soit $\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$. Puisque $X \neq 0$ on a $\lambda \geqslant 0$.
Si A est inversible (autrement dit si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre) on peut même en déduire que $\lambda > 0$.
Réciproquement, supposons toutes les valeurs propres de G strictement positives. Alors G est inversible. Mais $\det G = (\det A)^2$ donc A est inversible.

c) $\|y_i - y_j\|^2 = \|y_i\|^2 - 2\langle y_i \mid y_j \rangle + \|y_j\|^2$ donc la condition $\|y_i - y_j\| = 1$ est équivalente à $\langle y_i \mid y_j \rangle = 1/2$.
On note $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(y_1, \dots, y_n)$ et $G = A^T A$. On cherche A tel que

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & \cdots & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I + U) \quad \text{avec } U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

U est symétrique réelle donc diagonalisable ; elle est de rang 1 et sa trace vaut n donc il existe P orthogonale telle que $U = P\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}P^T$ et $G = P\begin{pmatrix} (n+1)/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}P^T = A^T A$ avec $A = P\begin{pmatrix} \sqrt{(n+1)/2} & & & \\ & 1/\sqrt{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}P^T$.

Exercice 5 Soit E un espace euclidien muni d'une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i$$

a) Montrer que f est un automorphisme symétrique de E.

b) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique g tel que $g \circ g = f^{-1}$. g est-il unique ?

d) Soit g un automorphisme symétrique tel que $g \circ g = f^{-1}$. Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E.

a) La linéarité de f résulte de la bilinéarité du produit scalaire.
(e) étant une base, $f(x) = 0_E \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i \mid x \rangle = 0 \iff x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = E^\perp = \{0_E\}$. f est donc injective, puis bijective s'agissant d'un endomorphisme en dimension finie.
Enfin, $\langle f(x) \mid y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle \langle e_i \mid y \rangle = \langle x \mid f(y) \rangle$ donc f est un automorphisme symétrique.

b) Soit λ une valeur propre de f, et x un vecteur propre associé. Alors $\lambda \|x\|^2 = \langle f(x) \mid x \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$ et puisque f est un automorphisme, $\lambda > 0$.

c) Soit (b) une base orthonormée qui diagonalise f, avec $f(b_i) = \lambda_i b_i$. On définit $g \in \mathcal{L}(E)$ en posant $g(b_i) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} b_i$.

g est un automorphisme symétrique car sa matrice dans la base orthonormée (b) est diagonale donc symétrique, et de déterminant non nul. Et on a $g \circ g \circ f(b_i) = b_i$ donc $g \circ g \circ f = \mathrm{Id}$.
Notons que g n'est pas unique, par exemple parce que $-g$ convient aussi. Plus précisément, on pourrait montrer qu'il y a exactement 2^n solutions, correspondant au choix des $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que $g(b_i) = \dfrac{\epsilon_i}{\sqrt{\lambda_i}} b_i$.

d) On a $\langle g(e_i) \mid g(e_j)\rangle = \langle e_i \mid g \circ g(e_j)\rangle = \langle e_i \mid f^{-1}(e_j)\rangle$.

Par ailleurs, $e_j = f\big(f^{-1}(e_j)\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid f^{-1}(e_j)\rangle e_i$ et par unicité de la décomposition dans une base, $\langle e_i \mid f^{-1}(e_j)\rangle = \delta_{ij}$.
Ainsi, $\langle g(e_i) \mid g(e_j)\rangle = \delta_{ij}$; la famille $(g(e_i))$ est orthonormée ; c'est donc une base orthonormée puisque g est un automorphisme.

Exercice 6 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$.

a) Montrer que $\det A > 0$.

b) Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$, et $B = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$. Montrer que $\det B > 0$.

c) Réciproquement, soit A une matrice symétrique réelle telle que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\det((a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}) > 0$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$.

a) Soit λ une valeur propre réelle de A, et $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors $X^T A X = \lambda \|X\|^2$ donc $\lambda > 0$. Puisque A est diagonalisable on en déduit $\det A > 0$.

b) Soit $Y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, et $X = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Alors $Y^T B Y = X^T A X > 0$ donc d'après le premier point $\det B > 0$.

c) On raisonne par récurrence sur n.

– C'est clair pour $n = 1$: $A = (a)$ avec $a > 0$ et $X^T A X = a x^2 > 0$.
– Si $n > 1$, on suppose le résultat acquis au rang $n-1$, et on note $B = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$. On a $\det A > 0$ donc toutes les valeurs propres de A sont non nulles, et le nombre de valeurs propres négatives (comptées avec leur multiplicité) est pair. Supposons qu'il en existe au moins deux : il existe $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ et $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ unitaires et orthogonaux tels que $AX_i = \lambda_i X_i$.

  Si la dernière composante des l'un des deux X_i est nulle, on peut écrire $X_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_i^T B Y_i = X_i^T A X_i = \lambda_i \|X_i\|^2 < 0$, ce qui est absurde par hypothèse de récurrence.

  Dans le cas contraire on peut écrire $X_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}$ avec $\alpha_i \neq 0$ et poser $X = \alpha_2 X_1 - \alpha_1 X_2 = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Dans ce cas, $Y^T B Y = X^T A X = \alpha_2^2 \lambda_1 + \alpha_1^2 \lambda_2 < 0$, ce qui est là encore absurde par hypothèse de récurrence.