Algèbre linéaire (complément pour 5/2)

Les exercices notés d'un obèle † sont de « grands classiques ».

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel et $(v_1,\dots,v_n) \in \mathrm{E}^n$. On note V le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\left\{v_i - v_j \;\middle|\; (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right\}$. Montrer que $\dim \mathrm{V} \leqslant n-1$.

Considérons les vecteurs $v'_i = v_i - v_n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. On a $v'_1,\dots,v'_{n-1} \in \mathrm{V}$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $v_i - v_j = \begin{cases} v'_i - v'_j & \text{si } i \leqslant n-1 \text{ et } j \leqslant n-1 \\ v'_i & \text{si } j = n \\ -v'_j & \text{si } i = n \end{cases}$ donc $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}(v'_1,\dots,v'_{n-1})$. Il en résulte que $\dim \mathrm{V} \leqslant n-1$.

Exercice 2

a) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

b) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si $\det \mathrm{A} \in \{-1,1\}$.

c) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que A, A + B, A + 2B, A + 3B, A + 4B sont inversibles et que leurs inverses sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A + 5B est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

a) On vérifie sans peine que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) Si $\det \mathrm{A} = ad - bc$ appartient à $\{-1,1\}$, la formule précédente montre que A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Réciproquement, si A et A^{-1} sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\det \mathrm{A}$ et $\det \mathrm{A}^{-1}$ sont des entiers relatifs, et $(\det \mathrm{A})(\det \mathrm{A}^{-1}) = \det \mathrm{I}_2 = 1$ donc $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}^{-1} = \pm 1$.

c) Considérons l'application $\phi : t \mapsto \det(\mathrm{A} + t\mathrm{B})$. S'agissant de matrices 2×2, il est évident que cette application est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients entiers.
D'après la question précédente nous savons que $\phi(0)$, $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(3)$, $\phi(4)$ appartiennent à $\{-1,1\}$ et il faut montrer qu'il en est de même de $\phi(5)$.
Or parmi ces cinq valeurs il y en a forcément trois qui sont égales et d'après le principe d'interpolation tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui prend trois fois la même valeur est constant. ϕ est donc constant égal à ± 1 et on a bien $\phi(5) \in \{-1,1\}$ (ainsi que $\phi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$).

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = \mathrm{Id}$, $g^2 = \mathrm{Id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a) Montrer que E est de dimension paire. On pose $\dim(\mathrm{E}) = 2p$.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_p \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$$

a) Soit $n = \dim \mathrm{E}$. Puisque $f \circ g = -g \circ f$ on a $\det(f \circ g) = (-1)^n \det(g \circ f)$ soit $\det f \det g = (-1)^n \det g \det f$ et puisque $\det f \neq 0$ et $\det g \neq 0$, $(-1)^n = 1$: $\dim \mathrm{E}$ est pair.

b) Puisque $f^2 = \mathrm{Id}$, f est une symétrie et $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.
De plus, puisque $f \circ g + g \circ f = 0$, on a pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $g(x) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, $g(x) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Ainsi, $g\big(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})\big) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $g\big(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})\big) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
Puisque g est bijectif, $\dim g(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\dim g(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})) = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ donc les inclusions précédentes prouvent que $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, d'où l'égalité $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.
Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}))$. Puisque g est un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, $(g(e_1),\dots,g(e_p))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

On en déduit que $(e_1,\dots,e_p,g(e_1),\dots,g(e_p))$ est une base de E. La matrice de f dans cette base est bien $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_p \end{array}\right)$ et puisque $g^2 = \mathrm{Id}$, la matrice de g dans cette base est $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & 0 \end{array}\right)$.

Exercice 4 Soient E, F, G et H quatre espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, $h \in \mathcal{L}(\mathrm{G},\mathrm{H})$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(g\circ f) + \mathrm{rg}(h\circ g) \leqslant \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(h\circ g\circ f)$$

Commençons par établir un résultat général : si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{V})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ on applique le théorème du rang à l'application linéaire $\begin{pmatrix} \mathrm{Im}\,u & \longrightarrow & \mathrm{W} \\ x & \longmapsto & v(x) \end{pmatrix}$ pour obtenir : $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v\circ u) + \dim\big(\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v\big)$.
Pour $u = g\circ f$ et $v = h$ on obtient : $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(h\circ g\circ f) + \dim\big(\mathrm{Im}(g\circ f)\cap \mathrm{Ker}\,h\big)$.
Pour $u = g$ et $v = h$ on obtient : $\mathrm{rg}(h\circ g) = \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Im}\,g\cap\mathrm{Ker}\,h)$.
En sommant il vient : $\mathrm{rg}(g\circ f) + \mathrm{rg}(h\circ g) = \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(h\circ g\circ f) + \dim(\mathrm{Im}(g\circ f)\cap\mathrm{Ker}\,h) - \dim(\mathrm{Im}\,g\cap\mathrm{Ker}\,h)$.
Mais $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}\,g$, donc $\dim(\mathrm{Im}(g\circ f)\cap\mathrm{Ker}\,h) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,g\cap\mathrm{Ker}\,h)$, ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 5 †

Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$.

On a $\phi\circ\phi = \mathrm{Id}$ donc ϕ est une symétrie vectorielle. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(\phi+\mathrm{Id})$ et dans une base adaptée à cette décomposition la matrice associée à ϕ est diagonale avec des 1 et des -1 sur la diagonale, en nombre égal respectivement à $\dim(\mathrm{Ker}(\phi-\mathrm{Id}))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\phi-\mathrm{Id}))$.
Or $\mathrm{Ker}(\phi-\mathrm{Id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques) et $\mathrm{Ker}(\phi+\mathrm{Id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices anti-symétriques) donc $\det\phi = (-1)^{n(n-1)/2}$ et $\mathrm{tr}(\phi) = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a) Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $\big(x, u(x)\big)$ est liée.

b) Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui laissent stable tout hyperplan de E.

a) Soit (e) une base de E ; alors $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale. Posons $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Pour $i \neq j$ la famille $\big(e_i+e_j, u(e_i+e_j)\big) = \big(e_i+e_j, \lambda_i e_i + \lambda_j e_j\big)$ est liée donc $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_i \\ 1 & \lambda_j \end{vmatrix} = 0$, soit $\lambda_i = \lambda_j$. u est bien une homothétie vectorielle.

b) Soit $x \in \mathrm{E}\setminus\{0\}$. On complète $\{x\}$ pour former une base $(e) = (x, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E, et on note $\mathrm{H}_k = \mathrm{Vect}(x, e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors $\mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_{n-1}$ sont des hyperplans et $\mathrm{H}_1\cap\cdots\cap\mathrm{H}_{n-1} = \mathrm{Vect}(x)$.
En effet, si on décompose $y \in \mathrm{E}$ dans la base (e) : $y = \lambda x + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k e_k$ alors $y \in \mathrm{H}_k \iff \alpha_k = 0$ donc

$$y \in \mathrm{H}_1\cap\cdots\cap\mathrm{H}_{n-1} \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0 \iff y \in \mathrm{Vect}(x).$$

Ainsi, si u laisse stable tout hyperplan alors $u(x) \in \mathrm{H}_1\cap\cdots\cap\mathrm{H}_{n-1} = \mathrm{Vect}(x)$ et nous avons prouvé qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. De là on déduit par la première question que u est une homothétie.

Exercice 7 Soit $n \geqslant 2$ un entier et ϕ un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $\forall(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\phi(\mathrm{AB}) = \phi(\mathrm{A})\phi(\mathrm{B})$.

a) Déterminer $\phi(\mathrm{I}_n)$.

b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $\phi(\mathrm{E}_{i,i})$ est un projecteur de rang 1.

c) Soit $u_i \in \mathrm{Im}\,\phi(\mathrm{E}_{i,1})$, $u_i \neq 0_{\mathrm{E}}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

a) Puisque ϕ est un automorphisme, il existe une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\phi(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$. En posant $\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ l'égalité $\phi(\mathrm{AB}) = \phi(\mathrm{A})\phi(\mathrm{B})$ donne $\phi(\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$.

b) On a $\mathrm{E}_{i,i}^2 = \mathrm{E}_{i,i}$ donc pour $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{E}_{i,i}$ l'égalité $\phi(\mathrm{AB}) = \phi(\mathrm{A})\phi(\mathrm{B})$ donne $\phi(\mathrm{E}_{i,i}) = \phi(\mathrm{E}_{i,i})^2$, ce qui prouve que $\phi(\mathrm{E}_{i,i})$ est un projecteur.
On a $\mathrm{I}_n = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}_{i,i}$ donc $\mathrm{I}_n = \phi(\mathrm{I}_n) = \sum_{i=1}^{n}\phi(\mathrm{E}_{i,i})$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a donc $x = \sum_{i=1}^{n}\phi(\mathrm{E}_{i,i})(x)$, ce qui prouve que

$\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} \phi(\mathrm{E}_{i,i})$. Nous allons maintenant montrer que cette somme est directe.
Considérons une autre décomposition de x ; celle-ci s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \phi(\mathrm{E}_{i,i})(x_i)$ avec $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{C}^n$. Composons par $\phi(\mathrm{E}_{j,j})$: on obtient $\phi(\mathrm{E}_{j,j})(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\mathrm{E}_{j,j}\mathrm{E}_{i,i})(x_i) = \phi(\mathrm{E}_{j,j})(x_j)$; la décomposition est bien unique.

S'agissant d'une somme directe, on a donc $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{rg} \phi(\mathrm{E}_{i,i}) = n$. Mais ϕ est un automorphisme donc $\phi(\mathrm{E}_{i,i}) \neq 0$ et $\operatorname{rg} \phi(\mathrm{E}_{i,i}) \geqslant 1$. Il en résulte que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{rg} \phi(\mathrm{E}_{i,i}) = 1$.

c) Montrons que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre, en considérant la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $x_i \in \mathbb{C}^n$ tel que $u_i = \phi(\mathrm{E}_{i,1})(x_i)$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(\mathrm{E}_{i,1})(x_i) = 0$. En composant par $\phi(\mathrm{E}_{j,j})$ cette égalité se réduit à $\lambda_j \phi(\mathrm{E}_{j,1})(x_j) = 0$, soit $\lambda_j u_j = 0$, et puisque $u_j \neq 0$ il vient $\lambda_j = 0$. La famille (u) est libre ; c'est une base de $\mathbb{C}^n$.

Exercice 8 †

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_k) = e_{k+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

Notons déjà que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u^n(e_k) = 0$ donc $u^n = 0$.
Considérons H, sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par u, et notons $v = u_{\mathrm{H}} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ la restriction de u à H.

- Si $v = 0$ alors $\mathrm{H} \subset \operatorname{Ker} u$. Mais $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_n)$ donc $\mathrm{H} = \{0\}$ ou $\mathrm{H} = \operatorname{Vect}(e_n)$.
- Si $v \neq 0$ on a $v^n = 0$ donc on peut définir son indice de nilpotence, à savoir le plus petit entier $k \in [\![1, n]\!]$ vérifiant $v^{k-1} \neq 0$ et $v^k = 0$.
  On a $\mathrm{H} \subset \operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Vect}(e_{n-k+1}, \ldots, e_n)$ donc $\dim \mathrm{H} \leqslant k$. Mais si on choisit $x \in \mathrm{H}$ tel que $v^{k-1}(x) = 0$ un résultat classique montre que la famille $(x, v(x), \ldots, v^{k-1}(x))$ est libre donc que $\dim \mathrm{H} \geqslant k$. En définitive on a donc $\dim \mathrm{H} = k$ et $\mathrm{H} = \operatorname{Vect}(e_{n-k+1}, \ldots, e_n)$.

En conclusion, les sous-espaces stables sont les sous-espaces $\{0\}$ et $\operatorname{Vect}(e_p, \ldots, e_n)$ avec $p \in [\![1, n]\!]$.