Corrigé

a) $\mathrm{tr}(A) = \sum_i A_{ii}$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(A)) = \sum_i \mathbb{E}(A_{ii}) = 0$.

$\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i,j} A_{ij}A_{ji} = \sum_i A_{ii}^2 + \sum_{i\neq j} A_{ij}A_{ji} = n + \sum_{i\neq j} A_{ij}A_{ji}$ donc, puisque A_{ij} et A_{ji} sont indépendants lorsque $i \neq j$, $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(A^2)) = n + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}(A_{ij})\mathbb{E}(A_{ji}) = n$.

$\mathrm{tr}(A^3) = \sum_{i,j,k} A_{ij}A_{jk}A_{ki} = \sum_i A_{ii}^3 + 3\sum_{i\neq j} A_{ii}A_{ij}A_{ji} + \sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i} A_{ij}A_{jk}A_{ki}$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(A^3)) = \sum_i \mathbb{E}(A_{ii}^3) = \sum_i \mathrm{E}(A_{ii}) = 0$.

$\mathrm{tr}(A^4) = \sum_{i,j,k,l} A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{li}$ donc suivant le même principe on obtient $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(A^4)) = \sum_i \mathbb{E}(A_{ii}^4) + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}(A_{ij}^2)\mathbb{E}(A_{ji}^2) = n + n(n-1) = n^2$.

b) Considérons la matrice A' obtenue à partir de A en multipliant sa première colonne par -1. Alors $\mathbb{E}(\det(A')) = \mathbb{E}(\det(A))$. Mais $\det(A') = -\det(A)$ donc $\mathbb{E}(\det(A)) = 0$.